

Ulrika Ekstam
Heidi Hellstrand
Johan Korhonen
Pirjo Aunio

Forskningsbaserade kartläggnings- och interventionsmaterial i matematik för elever i Svenskfinland

Tidigare studier har visat på ett samband mellan matematikkunskaper under de tidigare åren och senare prestationer i matematik, och det har konstaterats att detta gäller speciellt för vissa centrala färdighetsområden: tal- och antalsuppfattning, räknefärdigheter, aritmetiska basfärdigheter och förståelse för matematiska samband. Genom att i ett tidigt skede kunna identifiera de elever som är i risk för inlärningssvårigheter i matematik kan dessa elever få ändamålsenligt stöd, innan svårigheterna blir för stora. I den här studien undersöks med hjälp av innehållsanalys hur de centrala matematikfärdigheterna syns i de forskningsbaserade kartläggnings- och interventionsmaterial i matematik som finns tillgängliga för finlandssvenska elever i åldern 4–13 år. Studien visar att alla kartläggningsverktyg innefattar flera färdighetsområden, men att det saknas kartläggningsverktyg som mäter tal- och antalsuppfattning på ett tillförlitligt sätt. Det saknas även forskningsbaserade interventionsprogramprogram för elever i åldern 9–13. Målet med studien är att sammanfatta och undersöka de iden-

tifierings- och interventionsprogram som finns tillgängliga på svenska, och därigenom ge lärare i de finlandssvenska skolorna redskap för att identifiera och stödja elever med svårigheter i matematik i grundskolan.

INTRODUKTION

Kunskaper i matematik anses idag vara allt viktigare för att man ska vara delaktig i samhället. Detta gäller inte endast det dagliga livet, utan även på arbetsmarknaden och i samhället i stort förväntas det att medborgarna har en viss nivå av bas-kunskaper i matematik. Bristfälliga matematikfärdigheter kan ha en negativ effekt, inte bara för den enskilde individen, utan även på lång sikt för landets ekonomi (European Commission, 2013). Resultat från internationella studier visar att cirka en fjärdedel av eleverna i länder som tillhör Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) inte uppnår tillräckliga matematikkunskaper (nivå 2) som behövs i det dagliga livet (OECD, 2016).

Forskning har visat att tidiga grundläggande matematikfärdigheter kan vara avgörande för att man i vuxen ålder ha den beredskap som behövs för att aktivt delta i samhället (Hakkarainen, Holopainen & Savolainen, 2016; Korhonen, Linnanmäki & Aunio, 2014). Svaga matematikfärdigheter anses bero på ett flertal individuella faktorer (t.ex. kognitiva, neuropsykologiska, genetiska; Cragg, Keeble, Richardson, Roome & Gilmore, 2017; Geary, 2010) samt ogynnsamma bakgrundsfaktorer (t.ex. socio-ekonomisk bakgrund, skolbakgrund; Banerjee & Lamb 2016; OECD, 2016). Bland de individuella faktorerna har det till exempel konstaterats att yngre elevers tal- och antalsuppfattning ligger som grund för senare utveckling av matematikkunskaper, eftersom tal- och antalsuppfattning kan anses förutspå senare matematikprestationer under skoltiden (Geary m.fl., 2018; Jordan, Glutting & Ramineni, 2010), d.v.s. svag tal- och antalsuppfattning under de tidiga skolåren kan vara en bakomliggande orsak till senare matematiksvårigheter. Vid longitudinella studier har man kunnat konstatera att även äldre elever med svårigheter i matematik uppvisar svagheter inom dessa områden (Locuniak & Jordan, 2008; Mazzocco & Thompson, 2005). Ju tidigare vi kan identifiera elever med bristande färdigheter i matematik och sätta in ändamålsenliga stödinsatser, desto bättre är prognosen för att minska graden och omfattningen av fortsatta svårigheter (Fuchs, Fuchs & Hollenbeck, 2007). Därmed behövs forskningsbaserade kartläggnings- och interventionsprogram för alla åldersgrupper i våra skolor.

Syftet med den här artikeln är att undersöka hur centrala färdigheter i matema-

tik syns i de forskningsbaserade kartläggningsverktyg och interventionsprogram som finns tillgängliga för finlandssvenska elever i åldern 4–13 år. Med den här informationen kan vi få viktig kunskap om vad som finns tillgängligt just nu och vilka områden som behöver utvecklas, för att kunna ge lärarna de verktyg som de behöver för att stödja eleven i deras lärande i matematik.

Centrala färdigheter i matematik

Tidigare studier har visat på ett samband mellan matematikkunskaper under de tidiga åren och senare prestationer i matematik (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunio, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Geary, Nicolas, Li & Sun, 2017; Koponen, Salmi, Eklund & Aro, 2013; Merkley & Ansari, 2016; Zhang m.fl., 2018). I synnerhet grundläggande räknefärdigheter och tal- och antalsuppfattning har visat på god prediktiv förmåga (Aunio, 2019a). Dessa områden har lyfts fram i flera teoretiska modeller kring centrala färdigheter i matematik, vilka har utvecklats genom teoretiska eller empiriska analyser, eller genom en koppling av dessa angreppssätt. De modeller som använts och används, både nationellt och internationellt, har till stor del samma tyngdpunktsområden: grundläggande tal- och antalsuppfattning samt räknefärdigheter, begreppsförståelse samt kännedom om hur operera med antal och tal. De flesta modeller har utvecklats främst med tanke på elever med typisk utveckling i matematik (Fritz, Ehlert & Balzer, 2013; Krajewski & Schneider, 2009; Sarama & Clements, 2009; Steffe, 1992), men det finns även ett par modeller som särskilt har lyft fram behovet

av att fokusera på elever med bristande färdigheter i matematik (Aunio & Räsänen, 2015; Wright, Martland & Stafford, 2006).

Fastän syftet och målgruppen i ovan nämnda modeller varierar något, har modellerna fokus på samma centrala färdigheter i matematik, dvs. numeriska färdigheter med fokus på tal- och antalsuppfattning. Tre av modellerna (Aunio & Räsänen, 2015; Sarama & Clements, 2009; Wright m.fl., 2006) lyfter explicit fram att deras syfte är att utgöra ett arbetsverktyg för lärare. Fokuset i Aunio och Räsänens (2015) modell ligger på de färdigheter som varje elev förväntas bemästra och den vill särskilt säkerställa att såväl elever med typisk som med svag utveckling tillägnar sig de centrala färdigheterna i matematik. Eftersom Aunio och Räsänens modell är utvecklad som ett pedagogiskt verktyg för lärare, för att identifiera elever med risk för inlärningssvårigheter i matematik, har vi valt att utgå från denna modell i vår studie. Modellen bygger på fyra centrala färdighetsområden: tal- och antalsuppfattning (urskilja och jämföra tal och antal), räknefärdigheter (uppräknings av talraden, antalsräkning och siffersymboler), aritmetiska basfärdigheter (de fyra räknesätten, med och utan uppställning, räknehändelser och tillämpade uppgifter) och förståelse för matematiska samband (klassificering, en-till-en-principen, grundläggande aritmetiska principer, matematiska symboler samt positions- och tiobassystemet). Dessa områden utgör de mest centrala matematikfärdigheterna och de kan anses ligga som grund för fortsatt lärande i matematik (Aunio & Räsänen, 2015).

Studier om elevernas matematiska utveckling under skolåldern har gett viktig kunskap om vilka centrala matematiska färdigheter som eleverna behöver behärska för att motverka inlärningssvårigheter i matematik senare i livet (Jordan m.fl., 2010; Wright, Ellemor-Collins & Tabor, 2012). Studier har också visat att det långt är samma färdigheter i matematik som är de mest grundläggande och viktiga att fokusera på, såväl för de äldre eleverna som för de yngre. Bryant och Bryant (2008) påpekar att det ofta är samma typer av svårigheter som eleverna uppvisar, oavsett om de är i de lägre eller högre årskurserna. Till en början utvecklar eleverna de centrala färdigheterna med fokus på (positiva) ensiffriga heltal. Ju äldre eleverna blir desto mer utvidgas talområdet, och räkandet med heltal kompletteras med rationella tal (Aunio, Laine & Räsänen, manuskript; Locuniak & Jordan, 2008). Även tillämpade och textbaserade uppgifter får en allt större roll inom de grundläggande matematiska färdigheterna, ju högre upp i årskurserna eleverna kommer.

Tal- och antalsuppfattning. Matematiska färdigheter utvecklas långt innan barnen påbörjar den formella undervisningen (Griffin, 2003). Under de första åren har utvecklingen av tal- och antalsuppfattningen en stor betydelse, eftersom tal- och antalsuppfattning anses förutspå senare matematikutveckling (t.ex. Geary m.fl., 2017). Antalsuppfattning är oberoende av språk och innebär en förmåga att uppfatta antal i omgivningen, se och avgöra relationer mellan och storleken av antal samt bygga upp, kombinera och dela antal (Dowker, 2005). Antalsuppfattningen i sig är non-verbal och icke-symbolisk (t.ex.

“fyra klossar är färre än sju klossar”, “vid det bordet sitter färre människor än vid det andra”), medan taluppfattningen bygger på symboler (t.ex. “4”, “7” och “ $\frac{3}{4}$ ”) och räkneord (“fyra”, “sju” och “tre fjärdedelar”). Taluppfattning handlar om talens betydelse, relationer och storlek; hur tal tolkas och används. Med hjälp av en god tal- och antalsuppfattning kan eleven avgöra talens storleksordning, hantera tal mångsidigt och uppskatta rimligheten i ett resultat, samt utveckla effektiva och mångsidiga räknestrategier (Anghileri, 2006). Det är viktigt att stärka kopplingen mellan den icke-symboliska antalsuppfattningen och den symboliska taluppfattningen för att skapa en god grund för fortsatt lärande (Aunio & Niemivirta, 2010; Dyson, Jordan & Glutting, 2013; Geary m.fl., 2018). Särskilt den symboliska taluppfattningen har visat sig förutspå fortsatt framgång i matematik, jämfört med den icke-symboliska antalsuppfattningen (De Smedt, Noël, Gilmore & Ansari, 2013; Desoete m.fl., 2012; Sasanguie, Smedt, Defever & Reynvoet, 2012; Schneider m.fl., 2017).

En god tal- och antalsuppfattning är även av stor betydelse för utvecklingen av de övriga centrala färdigheterna som följer eleven upp i ålder. Tidigare studier har visat att taluppfattning under tidiga skolår har en stark koppling till färdigheter som utvecklas senare och som behövs för att t.ex. lösa tillämpade uppgifter (Jordan m.fl., 2010) eller för att behärska rationella tal (Jordan, Rodrigues, Hansen & Resnick, 2017; Mazzocco & Devlin, 2008; Siegler m.fl., 2012). Genom en god taluppfattning av heltal kan eleven utveckla en förståelse för rationella tal, eftersom eleven uppfattar förhållandet mellan täljare och näm-

nare (t.ex. om det är större eller mindre än 1) (Mazzocco & Devlin, 2008). Det har även konstaterats att svårigheterna med taluppfattning kan vara kumulativa över tid (Jordan m.fl., 2010).

Räknefärdigheter. Räknefärdigheterna utvecklas redan från tidig ålder då barnet börjar intressera sig för räkneord och räkneramsan (McCrink & Wynn, 2004). Till en början är räkneramsan i första hand en ordrams utan starkare koppling till tal och antal (Dowker, 2005). Småningom börjar barnet behärska räkneorden i rätt ordning (principen om stabil konsistens), förstå att vad som helst kan räknas (abstraktionsprincipen), förstå att mängder kan räknas i vilken ordning som helst (principen om irrelevant ordning), kombinera räkneord med föremål (ett-till-ett-principen) och förstå att det sistnämnda räkneordet anger antalet i mängden (kardinalitetsprincipen) (Gelman & Gallistel, 1978). Därmed börjar barnet/eleven använda räknandet till att bestämma exakta antal och med hjälp av principerna för räkning kan eleven räkna mer flexibelt och med större antal (Dowker, 2005). Eleven lär sig att hen inte alltid behöver börja från ett och att talraden kan räknas uppåt och nedåt, med hopp och genom att man börjar räkna från ett givet tal. Åldern då barnet förstår kardinalitetsprincipen har visat sig ha ett direkt samband med förståelsen för tal och senare för de matematiska färdigheter (Geary m.fl., 2018).

Räknefärdigheter innefattar även förståelse och användning av siffersymboler. Siffersymboler gör det möjligt att upptäcka och uttrycka samband och förändring (Haylock & Cockburn, 2008). I för-

skole- och nybörjarundervisningen är det viktigt att jobba med sambandet mellan räkneord, siffersymbol och antal, för att stärka sambandet mellan talens symboliska och icke-symboliska representationer (Desoete, Ceulemans, De Weerd & Pieters, 2012; Griffin, 2003). Vid övergången till rationella tal är det även viktigt att stärka kopplingen mellan de symboliska och icke-symboliska representationerna (Jordan m.fl., 2017), vilket med fördel kan tränas med t.ex. tallinjen (Haylock & Cockburn, 2008).

De grundläggande räknefärdigheterna utvecklas redan före skolåldern men fortsätter utvecklas genom att förståelsen för talföljder och antalsräkningen utvecklas (Haylock & Cockburn, 2008). Att förstå talföljder och att röra sig obehindrat på talraden är avgörande färdigheter då eleverna arbetar med större tal, rationella tal och negativa heltal och underlättar förståelsen för positions- och tiobassystemet (Mononen, Aunio, Väisänen, Korhonen & Tapola, 2017). Goda räknefärdigheter har visat sig förutspå fortsatt lärande i matematik (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola m.fl. 2004; Bartelet, Ansari, Vaessen & Blomert, 2014; Geary m.fl., 2018).

Aritmetiska basfärdigheter. Aritmetiska basfärdigheter innefattar grundläggande addition, subtraktion, multiplikation och division, både med en- och flersiffriga tal samt med och utan uppställning. Additions- och subtraktionsfärdigheter byggs till en början långt på räknefärdigheter och räknebaserade strategier, där eleven använder räknefärdigheter (främst räkneramsan) för att räkna delar och helheter. Till en början inleder eleven räkandet från

ett, och det räknar alla delar i mängden (eng. count all). Småningom utvecklar eleven mer tidsbesparande metoder genom att vid addition räkna vidare från den första termen (eng. count on from first) eller utnyttja kommutativiteten och räkna vidare från den största termen (eng. count on from larger). Subtraktionsstrategierna utvecklas på motsvarande sätt som additionsstrategierna (använder räkneramsan och fingrarna, räknar uppåt eller nedåt i ramsan) (Dowker, 2005). Dessa strategier är huvudsakligen räknebaserade och förutsätter att eleven behärskar räkneramsan. För ett mer smidigt och flexibelt räknande behöver eleverna utveckla strategier som också baserar sig på att återkalla fakta ur minnet (Carr & Hettinger, 2003). Memorerad (automatiserad) talfakta (t.ex. tiopar, dubblor och multiplikationstabellerna) kan användas i beräkningarna genom att man exempelvis delar beräkningarna i delberäkningar eller delar upp tal i lättare hanterbara delar (tankeled). Dessa strategier används av de flesta äldre eleverna och av vuxna med typisk utveckling i matematik (Carr & Hettinger, 2003). De effektiva strategierna förutsätter förståelse för talens egenskaper och tillämpning av räkneprinciperna (Dowker, 2005). Automatisering av talfakta utgör en viktig del för att man ska utveckla och använda mer effektiva räknestrategier. Utvecklingen och träningen av multiplikations- (och divisions-) strategier baserar sig främst på att lära sig utantill och att återkalla fakta ur minne. I början tränas multiplikation ofta genom upprepad addition eller med talföljder (genom att utläsa t.ex. vart tredje tal), medan division kan basera sig på upprepad addition eller subtraktion (addera eller subtrahera nämnaren upprepade gånger).

För de flesta eleverna blir ändå automatiseringen av multiplikationstabellerna den grundläggande strategin för både multiplikation och division, och är den strategi som äldre elever främst använder (Carr & Hettinger, 2003).

Longitudinella studier har visat att aritmetiska basfärdigheter spelar en mycket central roll för elevens framtida matematiska utveckling (Jordan, Kaplan, Ramineni & Locuniak, 2009; Locunic & Jordan, 2008; Mazzocco & Thompson, 2005). Automatisering av talfakta har även för de äldre eleverna visat sig ha inverkan på fortsatt matematisk utveckling, speciellt just för att kunna använda tankeled och algoritmer men också för att bygga upp en förståelse för algebra (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Flyt i addition och subtraktion hos yngre elever har visat sig förutspå fortsatt lärande i matematik (Locuniak & Jordan, 2008), men andra studier har även visat att framför allt addition och multiplikation framstår som betydande räknesätt, eftersom goda kunskaper i dessa även syns inom subtraktion och division (Aunio, Laine & Räsänen, manuskript).

Förståelse för matematiska samband. Förståelse för matematiska samband innefattar matematisk-logiska principer, aritmetiska principer, matematiska symboler samt tiobas- och positionssystemet. Matematisk-logiska principer innebär att jämföra, klassificera och att seriера samt att använda tillhörande begrepp, vilka kan anses som viktiga för att utveckla matematiska färdigheter. Jämförelser handlar ofta om antal (fler, färre, flest, först och lika många). Klassificeringen görs till en början på basen av en egen-

skap (t.ex. färg, form eller storlek) men genom övning kan barnet klassificera utgående från flera egenskaper (t.ex. färg och form). Seriering innebär att barnet ordnar en mängd föremål efter en egenskap, exempelvis från största till minsta. Ett-till-ett-principen tränar barnet genom att plocka fram rätt antal skedar till de som ska äta eller plocka fram rätt antal vantar. Ett-till-ett-principen syns även då barnet pekräknar, det vill säga säger räkneordet samtidigt som hen pekar på föremålet som räknas. Matematisk-logiska principer spelar en central roll särskilt inom småbarnspedagogiken (Aubrey & Godfrey, 2003; Aunio & Niemivirta, 2010; Van de Rijt, m.fl., 2003). De aritmetiska principerna (förhållandet mellan del och helhet, kommutativitet, associativitet och inversion) fungerar som grund för att utveckla en förståelse för våra räkneoperationer samt för utvecklingen av tiobas- och positionssystemet och hjälper eleven att utveckla ett flyt i räknandet. Förståelsen av tiobas- och positionssystemet är också en förutsättning för senare utveckling av förståelsen för t.ex. algoritmer (Moura m.fl., 2013). Den konceptuella förståelsen ligger som grund för goda färdigheter i matematik, exempelvis för att utveckla mångsidiga räknestrategier (Griffin, 2003), vilka sedan flexibelt kan tillämpas vid en- och flersiffriga aritmetikuppgifter (addition, subtraktion, multiplikation och division) (Hickendorff, Torbeyens & Verschaffel, 2019).

Elever med inlärningssvårigheter i matematik

Det finns ingen entydig definition av matematiksvårigheter, utan ett flertal begrepp

och definitioner används parallellt (Ansari, 2015; Barnes, 2005; Geary, 2013; Mazzocco, 2007). De vanligaste begreppen är allmänna (generella) matematiksvårigheter som innefattar bland annat lågpresterande elever i matematik och elever med inlärningsvårigheter i matematik, samt specifika matematiksvårigheter som innefattar dyskalkyli. Definitionen av de här två termerna är diffusa och baserar sig bland annat på vilken poänggräns (eng. "cut-off point") som används vid mätningen av elevernas kunskaper.

Tidigare studier definierar elever med svårigheter i matematik som en heterogen grupp, som presterar klart sämre i matematik än jämnåriga och med stora skillnader i sin matematiska utvecklingsprofil (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012; Mazzocco, Devlin & McKenney, 2008; Mazzocco & Räsänen, 2013). Till exempel Geary (2013) beskriver att elever, vars matematikkunskaper placerar sig inom elfte till tjugofemte percentilen under två efterföljande år i standardiserade matematiktest, kan anses vara lågpresterande i matematik. Den här definitionen kan även jämföras med nivå 2 i utvärderingen Programme for International Students Assessment (PISA), som definierar de elever som inte överskrider nivå 2 som lågpresterande (OECD, 2016). Vad gäller specifika matematiksvårigheter anser Geary (2013) att elever vars matematikprestationer, två år i följd i standardiserade matematiktest, hör till den lägsta tionde percentilen kan anses ha specifika matematiksvårigheter. Denna grupp tenderar att uppvisa bristande tal- och antalsuppfattning (De Smedt & Gilmore, 2011; Geary m.fl., 2018; Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011) och

använder sig inte av effektiva minnesbaserade räknestrategier (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007; Zhang m.fl., 2018). Det kan dock vara mera ändamålsenligt att för yngre elever hellre tala om risk för svårigheter i matematik eller inlärningsvårigheter i matematik, eftersom dyskalkyli kan anses syfta på neurologiska dysfunktioner som diagnostiseras senare under skolgången (Aunio, 2019a).

För lärare är det bra att förstå innebörden av de olika begreppen, men för att i praktiken kunna identifiera elever med bristande färdigheter i matematik, och på så sätt kunna sätta in ändamålsenliga stödåtgärder i ett tidigt skede, är de beroende av tillgången på forskningsbaserade kartläggningsverktyg. Med detta som grund kan man konstatera att det är viktigt att man i samband med forskning om identifiering och kartläggning utvecklar verktygen enligt de senaste forskningsresultaten.

Identifiering av elever med inlärningsvårigheter i matematik

Det är av stor betydelse att kunna identifiera elever med risk för framtida svårigheter i matematik i ett så tidigt skede som möjligt, innan de blir för stora (Aunio, 2019b). För att detta ska vara möjligt behöver det finnas tillgång till validerade och pålitliga kartläggningsverktyg.

I Finland förekommer det främst två typer av kartläggningsverktyg för att identifiera elever med inlärningsvårigheter i matematik (Aunio, Hautamäki & Mononen, 2018). Den första typen av kartläggningsverktyg

är de forskningsbaserade, dvs. de som baserar sig på ett utvecklingspsykologiskt perspektiv på utveckling av matematikfärdigheter, och har beprövat validitet och reliabilitet. Vidare har man samlat in data från ett representativt sampel för att kunna jämföra elevernas resultat i kartläggningsverktyget mot normvärden i populationen och på det sättet reliabelt kunna identifiera de elever som har inlärningssvårigheter i matematik. De här kartläggningsverktygen fokuserar ofta på centrala färdigheter i matematik, för att kunna identifiera de elever som uppvisar svagheter på de områden som forskning visat vara särskilt viktiga för fortsatt lärande, eller som visat sig vara en stötesten för elever med inlärningssvårigheter i matematik. Den andra typen av kartläggningsverktyg är läroplansbaserade, med syfte att utvärdera hur bra eleven har lärt sig en viss eller vissa matematiska färdigheter, utgående från läroplanens målsättning. En nackdel med läroplansbaserade kartläggningsverktyg är att de inte är baserade på forskning, dvs. validiteten och reliabiliteten är inte beprövad och det finns inget normdata att jämföra elevernas resultat med. Läroplanen omfattar alla områden och färdigheter inom matematik, vilket medför att dessa kartläggningsverktyg ofta har en stor bredd istället för ett särskilt fokus. Därmed innehåller de nödvändigtvis inte ett tillräckligt antal uppgifter inom olika matematiska delområden för att ge tillförlitliga resultat över elevens kunskaper inom ifrågasvarande färdighet (Mononen m.fl., 2017).

Interventioner

Begreppet *intervention* används idag allmänt inom skola och utbildning, och inne-

fattar ett flertal definitioner. En intervention kan vara ett åtgärdsprogram som används med elever för att ge dem stöd i sitt lärande och minska eventuella kunskapskillnader (Toll & Van Luit, 2014) eller användas i förebyggande syfte (Kucian m.fl., 2011). Interventionerna kan skilja sig i fråga om elevgrupp, mål, kontext, tid och innehåll (Fischer, Moeller, Cress & Nuerk, 2013; Mononen, Aunio, Koponen & Aro, 2014) och behöver därför jämföras för att effekten av en intervention ska vara så optimal som möjligt för varje enskild elev.

Ett flertal studier och metaanalyser har gjorts för att undersöka vilka parametrar som ger den bästa effekten av en intervention för elever med svårigheter i matematik (Chodura, Kuhn & Holding, 2015; Coddington, Burns & Lukito, 2011; Dennis m.fl., 2016; Gersten m.fl., 2009; Jitendra m.fl., 2018; Mononen m.fl., 2014). Tidigare forskning anser att det mest pålitliga och effektiva resultatet av en intervention fås då eleverna visar positiva resultat även en tid efter interventionens slut, d.v.s. att eleverna får en bestående kunskapsutveckling (Bailey m.fl., 2016). Det som dock eftersträvas med en optimal intervention är att kunskapsluckorna mellan lågpresterande och normalpresterande elever skulle minska (Aunio, 2019a).

Dennis och kolleger (2016) undersökte i sin metaanalys vilka faktorer som har en inverkan på interventionens effekt. Studien visar, bland annat, att lågpresterande elever, ≤ 35 :e percentilen, drar större nytta av interventioner, än elever som presterar bättre än 35:e percentilen. De konstaterar också att interventioner som innefattar lärarledda moment/undervisning (t.ex. indelning av uppgifter i svårig-

hetsgrad samt förklaring av olika termer och begrepp) samt det att interventionerna sker i små grupper är, speciellt effektivt för elever med inlärningssvårigheter i matematik. Även explicita interventioner med särskild fokus på barnets individuella behov och färdighetsnivå har visat sig vara mer effektiva än allmänna interventioner, även om tidigare studier visar på att lågpresterande elever gynnas av alla former av extra stöd (Dowker & Sigley, 2010). Det är viktigt att läraren noga funderar vilket det primära målet för interventionen är och även tar i beaktande de yttre förutsättningarna (intensitet, längd och miljö), för att interventionen ska vara så effektiv som möjligt (Aunio, 2019a).

Avsikten med den här studien är att sammanfatta och undersöka de kartlägningsverktyg och interventionsprogram som finns för finlandssvenska elever. Vi hoppas att studien ger läraren de redskap som behövs för att kunna välja de mest optimala materialen för att identifiera och stödja elever med svårigheter i matematik inom hela grundskolan.

Studien

Syftet med den här studien är att undersöka hur centrala färdigheter i matematik syns i forskningsbaserade kartlägningsverktyg och interventionsprogram, som finns tillgängliga för elever i Svenskfinland. Följande forskningsfrågor är av intresse:

1. Vilka verktyg för kartläggning av centrala färdigheter i matematik finns tillgängliga och vilka av färdigheterna kartläggs med dessa verktyg?

2. Vilka interventionsprogram för träning av centrala färdigheter i matematik finns tillgängliga och vilka av färdigheterna tränas med dessa program?

METOD

Sökning och inklusionskriterier

För att vi skulle hitta alla relevanta kartlägningsverktyg för identifiering och interventionsprogram för stöd i matematik, konsulterades skolpersonal och experter inom området. De forskningsbaserade materialen valdes sedan ut för vidare analys enligt följande kriterier:

1. Materialen skal vara tillgängliga på svenska.
2. Innehållet i materialen ska ha sin grund i tidigare forskning om hur matematikfärdigheter utvecklas.
3. Materialen ska ha prövats empiriskt och därmed ska det finnas referensdata tillgängligt.

Analys

När urvalet av materialen gjorts utifrån urvalskriterierna analyserade vi innehållet med avseende på de centrala färdigheterna i matematik med hjälp av innehållsanalys. I detta fall användes en så kallad summativ innehållsanalys vars syfte är att identifiera ord eller ett specifikt innehåll för att undersöka användningen av ordet eller innehållet (Hsieh & Shannon, 2005). Vi valde att fokusera på att identifiera de centrala färdigheterna (tal- och antalsuppfattning, räknefärdigheter, arit-

Tabell 1. Verktyg för kartläggning av färdigheter i matematik.

Kartlägningsverktyg	Typ av kartläggning	Målgrupp	Centralt innehåll	Utgivare/författare
MIO: Matematiken – Individen – Omgivningen	Observationsmaterial för matematikutveckling Utförs individuellt och i grupp	Småbarnspedagogik, 2–5 år	Problemlösning (matematiska språket och rationellt tänkande), geometri (form och läge), tal, antal, räknefärdigheter	Skaar Davidsen, Løge, Lunde, Reikerås & Dalvang (2012). Handledning till MIO: Matematiken – Individen – Omgivningen. Lund: Studentlitteratur. Tillgängligt via: Studentlitteratur
LukiMat – Bedömning av lärandet: Identifiering av stödbehov i matematik. Handbok.	Kartläggning för identifiering av elever i behov av stöd Normerat Papper och penna Kan utföras i grupp	Förskola och nybörjarundervisning, 5–9 år	Tal- och antalsuppfattning, räknefärdigheter, förståelse för matematiska samband, aritmetiska basfärdigheter	Koponen, Salminen, Aunio, Polet & Hellstrand, (2011). LukiMat – Bedömning av lärandet: Identifiering av stödbehov i matematik. Handbok. Gratis tillgängligt: http://www.lukimat.fi/lukimat-bedomning-av-larandet/material/identifiering-av-stodbehov
MAVALKA I och II	Kartläggning av matematiska färdigheter Utförs enskilt	Förskola och skolskolestart (hösten) 5–7 år MAVALKA I är anpassad för specialgrupper och invandrarbarn i förskolan.	Talbegrepp, talföljder och antalskonstans	Lampinen, Ikäheimo & Dräger (översättning Hartikainen), (2007). Tillgängligt via: Opperi Oy.
TIAN – kartläggning I och II	Kartläggning av färdigheter i tiobassystemet och måttenheter Papper och penna Kan utföras i grupp	TIAN-kartläggning I, 6–9 år, TIAN-kartläggning II, 9–12 år	Naturliga tal och decimaltal, räknefärdigheter, enhetsbyten	Ikäheimo, (2015). Tillgängligt via: ELLI Early learning Oy
RMAT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 9–12 år	Test för bedömning av räknefärdigheter Normerat Papper och penna Kan utföras i grupp	9–12 år	Automatisering av aritmetiska basfärdigheter (addition, subtraktion, multiplikation och division), enhetsbyten (pengar, volym, tid), rationella tal och algebra	Räsänen, Linnanmäki, Haapamäki & Skagersten (2008). Niilo Mäki Institutet. Tillgängligt via: Niilo Mäki Institutet (http://kauppa.nmi.fi)
MAKEKO	Summativt prov på det centrala innehållet i matematik Papper och penna Kan utföras i grupp	7–16 år	Centrala lärostoffet i matematik för åk 1–9	Ikäheimo, Putkonen & Voutilainen (2004). Ges inte längre ut på svenska.
KTLT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 13–16 år	Nivåtest för bedömning av grundläggande räknefärdigheter Normerat Digitalt (datorversion) Kan utföras i grupp	13–16 år	Tillämpning av aritmetiska basfärdigheter (utvidgning av talområdet samt rationella tal), klockan, algebra, geometri, procent	Räsänen, Linnanmäki, Kronberg & Uppgård (2013). Niilo Mäki Institutet Gratis tillgängligt via: www.O3.edu.fi/oppimateriaalit/neure/
ALVA	Kartläggning av färdigheter i yrkesmatematik Finns som papper och penna samt digital version. Kan utföras i grupp	Slutet av grundskolan och början av andra stadiet, 14–17 år.	Centrala begrepp och räknefärdigheter från grundskolans läroplan i matematik, vilka är nödvändiga att behärska i början av andra stadiet	Ikäheimo (2011). Tillgängligt via: Opikko.

Notering: Kartlägningsverktyg med fet stil är inkluderade i studien.

metiska basfärdigheter och förståelse för matematiska samband) i de material som valts ut för analys. Fokus lades på att identifiera: a) förekomst, b) operationalisering (dvs. på vilket sätt mättes/tränades denna färdighet) och c) hur stor del av materialen som fokuserade på dessa färdigheter.

RESULTAT

Vilka verktyg för kartläggning av grundläggande färdigheter i matematik finns tillgängliga och vilka av de centrala färdighetsområdena kartläggs i dessa verktyg?

I vår sökning hittades åtta kartläggningsverktyg som är tillgängliga för finlands-svenska skolor (Tabell 1). Av dessa uppfyllde fyra verktyg inklusionskriterierna för forskningsbaserade kartläggningsverktyg. De fyra kartläggningsverktygen beskrivs närmare nedan.

MIO: Matematiken – Individen – Omgivningen (Skaar Davidsen, Løge, Lunde, Reikerås & Dalvang, 2012). MIO är tänkt som ett stöd för att utveckla verksamheten och för att fånga upp de barn som behöver ytterligare uppföljning. MIO är utvecklat i Norge och är ett observationsmaterial för matematikutveckling för barn i åldern 2–5 år. Centrala färdighetsområden är problemlösning (matematiskt språk och rationellt tänkande), geometri (rum och form) och tal och räkning (tal, antal, räkneord och räkning). Verktuget används för att tidigt upptäcka tecken på ovanliga mönster i den språkliga och kognitiva utvecklingen inom det matematiska området.

LukiMat – Bedömning av lärandet: Identifiering av stödbehov i matematik (Koponen, Salminen, Aunio, Polet & Hellstrand, 2011) är ett normerat kartläggningsverktyg för identifiering av elever i behov av stöd i matematik. Kartläggningsmaterialet är uppbyggt på basen av Aunio och Räsänens modell gällande centrala färdighetsområden i matematik för elever i åldern 5 till 8 år (Aunio & Räsänen, 2015). Syftet med LukiMat-kartläggningen är att pedagogen får kunskap om elevernas färdigheter och kan arbeta utgående från det som eleverna redan kan; det vill säga bygga undervisningen på det som eleverna kan, samtidigt som de områden eleverna ännu inte behärskar tränas och utvecklas. LukiMat fokuserar på identifiering av färdigheter gällande tal- och antalsuppfattning, räknefärdigheter, förståelse för matematiska samband och aritmetiska basfärdigheter. LukiMat finns tillgängligt för tre åldersgrupper: förskola, årskurs 1 och årskurs 2. Inom varje årskurs finns tre parallella versioner (höst, vinter och vår), för att möjliggöra uppföljning under skolåret.

RMAT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 9–12 år (Räsänen, Linnanmäki, Haapamäki & Skagersten, 2008) är ett normerat kartläggningsverktyg baserat på det amerikanska nivåtestet WRAT, ett prestationstest på 10 minuter. Syftet med kartläggningsverktyget är att identifiera elever med inlärningssvårigheter i matematik i åldern 9–12 år. Testet mäter grundläggande färdigheter inom grundläggande aritmetik (bl.a. automatisering, algoritmer, rationella tal och större tal), enhetsbyten samt algebra.

KTLT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 13–16 år (Räsänen, Linnanmäki, Kronberg & Uppgård, 2013) är ett normerat, digitalt kartläggningsverktyg som mäter grundläggande matematiska färdigheter i slutet av grundskolan. Centrala färdighetsområden är tillämpade aritmetiska basfärdigheter, klockan, decimaltal, enhetsbyte, negativa tal, geometri, bråk, avrundning, ekvationer, procent samt stora tal. KTLT är lämpat för elever i åldern 13–16 år.

I vår sammanställning av hur de centrala färdigheterna syns i kartläggningsverktygen (Tabell 2) kan vi konstatera att alla verktyg innehåller uppgifter som kartlägger åtminstone ett par av de centrala färdighetsområdena. MIO består av tolv delområden varav två (17 %) kan kopplas till tal- och antalsuppfattning, två (17 %) till räknefärdigheter och fyra (33 %) till matematiska samband. Aritmetiska basfärdigheter observeras inte. I MIO-materialet observeras förståelse för matematiska samband genom fokus på barnets matematiska språk (lägesord, jämförelser och talbegrepp) och arbete med tal och antal (kardinalitetsprincipen, abstraktionsprincipen och ett-till-ett-principen). Även antalsräkning och användning av räkneramsan observeras. Eftersom LukiMat-kartläggningsverktyget bygger på modellen om de fyra färdighetsområdena är alla områden representerade i alla åldersgrupper vid höstens kartläggning, som är mer omfattande än vinterns och vårens kartläggningar. I förskolans kartläggning för vintern saknas uppgifter gällande aritmetiska basfärdigheter och förståelse för matematiska samband. I kartläggningen

för årskurs 1 för vinter respektive vår saknas uppgifter om räknefärdigheter, och i kartläggningarna för vinter respektive vår i årskurs 2 saknas uppgifter om räknefärdigheter och förståelse för matematiska samband. Fokus i LukiMat-kartläggningarna ligger på den symboliska matematiken medan den icke-symboliska antalsuppfattningen inte kartläggs. RMAT fokuserar främst på automatisering av aritmetiska basfärdigheter (de fyra räknesätten, 75 %), med utvidgat talområde och rationella tal. I verktyget ingår huvudräkning med ensiffriga tal (alla räknesätten) samt uppställning med flersiffriga tal. KTLT, som riktar sig till äldre elever (13–16 år), innehåller mestadels tillämpning av aritmetiska färdigheter (60 %). Majoriteten av uppgifterna är problemlösningssuppgifter där man ska tillämpa aritmetiska basfärdigheter, främst uppställning med flersiffriga tal, men det finns också en del uppgifter som inte är textbaserade. Både RMAT och KTLT saknar uppgifter som härrör till delar som mäter räknefärdigheter och förståelse av matematiska samband. För övrigt kan det konstateras att normeringen av både RMAT och KTLT är fem till tio år gamla.

Vilka interventionsprogram för träning av grundläggande färdigheter i matematik finns tillgängliga och vilka centrala färdighetsområden tränas med dessa program?

I vår sökning hittade vi fyra forskningsbaserade interventionsprogram som är tillgängliga för finlandssvenska daghem och (för)skolor (Tabell 3). Dessa beskrivs närmare nedan:

Nallematte (Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen, 2013) är utformat för att utveckla de yngsta barnens (3–5 år) matematikfärdigheter. Nallematte fokuserar på att träna och uppmärksamma matematiska begrepp och fenomen (t.ex. identifiering av och räkning med tal och antal) i omgivningen genom berättelser, lek och aktiviteter. Interventionen sker genom lekstunder i smågrupp eller individuellt tillsammans med pedagog.

Tal i farten (Räsänen, Dehaene, Maslov m.fl., 2012) är ett digitalt interventionsprogram som riktar sig till elever i förskolan och nybörjarundervisningen (5–8 år). Interventionsprogrammet är adaptivt, vilket betyder att det anpassar sig efter elevens nivå. Fokus ligger på tal- och antalsuppfattning inom talområdet 1–10. Spelet tränar också kopplingen mellan antal och

siffersymbol, förståelse för tallinjen samt additions- och subtraktionsfärdigheter.

Spel-Ett Matematik (Niilo Mäki Institutet) är ett digitalt interventionsprogram för elever i åldern 6–8 år. Programmet omfattar tre olika färdighetsområden: taluppfattning, talraden och addition. Programmet är adaptivt så att uppgifter och antal svarsalternativ varierar enligt elevens färdighetsnivå.

Vektor (Cognition Matters) är ett digitalt interventionsprogram som är utvecklat i samarbete mellan Karolinska institutet i Stockholm och Stockholms universitet. Programmet riktar sig till elever i förskole- och nybörjarundervisningen och fokuserar på att träna taluppfattning, addition och subtraktion, visuospatiala färdigheter samt träning av arbetsminnet.

Tabell 2. Antal och procentuell andel av uppgifter som mäter de centrala färdigheterna i matematik och som ingår i uppgifter i kartläggningsverktygen

Kartläggningsverktyg	Tal- och antalsuppfattning (%)	Räknefärdigheter (%)	Aritmetiska basfärdigheter (%)	Förståelse för matematiska samband (%)	Antal uppgifter i verktyget
MIO	2 (17)	2 (17)	0	4 (33)	12
Lukimat F höst	8 (17)	16 (33)	8 (17)	16 (33)	48
Lukimat F vinter	6 (24)	19 (76)	0	0	25
Lukimat F vår	0	15 (55)	8 (30)	4 (15)	27
Lukimat 1 höst	8 (14)	16 (28)	16 (28)	16 (28)	56
Lukimat 1 vinter	6 (17)	0	24 (66)	6 (17)	36
Lukimat 1 vår	6 (16)	0	20 (52)	6 (16)	38
Lukimat 2 höst	8 (11)	8 (11)	40 (56)	8 (11)	72
Lukimat 2 vinter	4 (7)	0	56 (93)	0	60
Lukimat 2 vår	9 (12)	0	56 (75)	0	75
RMAT	0	0	42 (75)	0	56
KTLT	2 (5)	0	24 (60)	0	40

Notering: % = andelen uppgifter/totala antalet uppgifter.

Av de interventionsprogram som vi analyserade (Tabell 3) riktar sig samtliga i första hand till yngre elever (3–8 år). Nallematte, som är utvecklat för barn före förskoleåldern, fokuserar främst på att väcka barns spontana intresse för tal och antal samt på att skapa förståelse för matematiska samband genom att seriering, jämförelser och matematiska begrepp. Det är även inriktat på samt räknefärdigheter genom tal- och antalsräkning och att på talets olika representationsformer. Nallematte saknar explicit träning i aritmetiska basfärdigheter med symboler.

Tal i farten fokuserar på jämförelse av tal, antal och enkla aritmetiska kombinationer (t.ex. $2 + 3$ vs. $4 + 1$), där barnet i första hand, utan direkt räkning, ska avgöra vilket tal eller antal som är större. Barnet kan inte själv välja uppgiftstyp eller svårighetsgrad utan programmet anpassar sig efter barnets nivå (adaptivt). Genom att barnen både ser och hör tal och antal befästs kopplingen mellan de olika representationerna av tal och antal. I Tal i farten övas även enkel addition och subtraktion med stöd av tallinjen. Förståelse för matematiska samband tränas enbart indirekt genom att antalet (prickarna) och talen (t.ex. $2 + 3$ vs. $4 + 1$) presenteras med olika kombinationer vilket tränar förståelsen för kommutativiteten och förhållandet mellan delar och helheter. En-till-en-principen tränas då spelarens (elevens) och motspelarens poäng jämförs och då spelaren rör sig framåt längs tallinjen enligt det antal poäng som hen har samlat.

I Spel-Ett Matematik är uppgifterna fördelade på tre kategorier: taluppfattning,

talraden och addition. Uppgifterna inom kategorin taluppfattning fokuserar på jämförelse av tal och antal och omfattar även färdighetsområdena räknefärdigheter (främst talens olika representationer) och förståelse för matematiska samband (en-till-en-principen och jämförelser). Förståelse för matematiska samband tränas även inom kategorin talraden, genom seriering. Inom kategorin addition tränas förutom aritmetiska basfärdigheter räknefärdigheter (talens olika representationer) även förståelse för matematiska samband (delar och helheter). Alla uppgiftskategorier omfattar både den symboliska och den icke-symboliska matematiken, men med fokus på den symboliska. Därmed kan vi se att Spel-Ett Matematik saknar explicit träning av den icke-symboliska antalsuppfattningen och innehåller endast additionsuppgifter för att träna de aritmetiska basfärdigheterna.

Vektor är ett adaptivt spel som innefattar mångsidig träning av tal- och antalsuppfattning (t.ex. med hjälp av tallinjen och identifiering av talpar), aritmetiska basfärdigheter (addition och subtraktion), räknefärdigheter (koppling mellan antal och symbol) samt förståelse av matematiska samband (indirekt genom t.ex. uppdelning och ihopsättning av tal). Vektor tränar också både den symboliska och den icke-symboliska taluppfattningen genom att samma typ av uppgift genomförs med båda representationsformerna. Spelet saknar dock explicita uppgifter för förståelse för matematiska samband. Rekommendationen är att Vektor att spelas 30 min/dag under åtta veckor.

DISKUSSION

Genom tidigare forskning har det identifierats ett antal centrala matematikfärdigheter som kan förutspå senare utveckling i matematik (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola m.fl., 2004; Geary m.fl., 2017; Zhang m.fl., 2018). Vi kan konstatera att de befintliga utvecklingsmodellerna av matematikfärdigheter till sitt innehåll är relativt likartade och grundar sig på ålderstypisk utveckling av *tal- och antalsuppfattning*, *räknefärdigheter*, *förståelse för matematiska samband* och *aritmetiska basfärdigheter*. Syftet med den här studien var att undersöka hur dessa färdigheter syns i de kartläggningsverktyg och interventionsprogram som finns tillgängliga för elever i Svenskfinland.

De kartläggningsverktyg som ingick i vår analys för elever i åldern 4–8 år fokuserar främst på de centrala färdigheterna som räknefärdigheter och aritmetiska basfärdigheter, medan verktygen som är anpassade för de lite äldre eleverna (9–13 år) främst fokuserar på aritmetiska basfärdigheter, med ökade krav på förståelse för textbaserade uppgifter samt utökad talområde och räkning med negativa och rationella tal. Att flera av kartläggningsverktygen för båda åldersgrupperna innehöll uppgifter som mäter de aritmetiska basfärdigheterna är positivt, eftersom dessa färdigheter anses vara goda indikatorer på inläringssvårigheter i matematik i samtliga åldersgrupper (Geary m.fl., 2007; Zhang m.fl., 2018). Utgående från vår studie kan vi dock konstatera att det saknas kartläggningsverktyg som mäter tal- och antalsuppfattning på ett tillförlitligt sätt. Både tal- och antalsuppfattning

har visat sig vara goda indikatorer på specifika inläringssvårigheter i matematik, även för äldre elever (De Smedt & Gilmore, 2011; Mazzocco m.fl., 2011; Piazza m.fl., 2010).

Vi kan också konstatera att utbudet av forskningsbaserade kartläggningsverktyg för elever i Svenskfinland är mycket smalt och att komplement av forskningsbaserade kartläggningsverktyg skulle behövas. Det finns dessutom behov av uppdateringar av de normeringar som finns tillgängliga för både RMAT och KTLT. För detta ändamål är projektet Functional Numeracy Assessment (FUNA) under utveckling. FUNA (stöds 2018–2019 med medel från Svenska kulturfonden) är ett nytt kartläggningsverktyg i matematik för årskurserna 3 till 9, och en normering för båda språkgrupperna är planerad att utföras under 2019 (Räsänen m.fl., 2019).

I interventionsprogrammen ligger fokus på träning som stödjer de grundläggande matematikfärdigheterna taluppfattning, räknefärdigheter samt förståelse för matematiska samband för elever i ålder 4–8 år. Vi kan dock konstatera att det skulle behövas mer explicit träning för antalsuppfattning och aritmetiska basfärdigheter. För de äldre eleverna (9 år och äldre) som har konstaterats ha inläringssvårigheter i matematik skulle det behövas interventionsprogram som är anpassade för den specifika åldersgruppen, och vilka skulle träna de centrala matematiska förmågorna, kompletterade med de områden som har konstaterats vara viktiga för fortsatt utveckling av matematikfärdigheter. Det innefattar speciellt träning av aritmetiska basfärdigheter (med utvidgat talområde

Tabell 3. Interventionsprogram för träning av färdigheter i matematik.

Interventionsprogram	Typ av intervention	Målgrupp	Centralt innehåll	Utgivare/författare
Nallematte	Lekstunder i smågrupp, grupp eller individuellt tillsammans med pedagog	Småbarnspedagogik, 3–5 åringar	Förståelse för matematiska samband (begrepp, jämförelser, seriering, ett-till-ett-principen), tal- och antalsuppfattning, räknefärdigheter	Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen (2013). Jyväskylä: Niilo Mäki Institutet. Kan köpas via: www.nmi.fi
Tal i farten	Digitalt (datorversion), adaptivt, individuell träning	Förskola och nybörjarundervisning, 6–8 åringar	Tal- och antalsuppfattning (talområdet 1-10), räknefärdigheter (tallinjen, antalsräkning samt sambandet mellan symbol, tal och antal), aritmetiska basfärdigheter	Räsänen, P., Dehaene, S., Maslov, O. m.fl. (2012). The Number Race, version 3.0. Gratis tillgängligt via: www.lukimat.fi och http://www.thenumberrace.com
Spel-Ett Matematik	Digitalt (datorversion), adaptivt, individuell träning	Förskola och nybörjarundervisning, 6–8 åringar	Taluppfattning, tallinjen, talföljder, räknefärdigheter, förståelse för matematiska samband (ett-till-ett-principen, jämförelser), addition	Gratis tillgängligt via: www.lukimat.fi
Vektor	Digitalt (tablettversion), adaptivt, individuell träning	Förskola och nybörjarundervisning, 6–8 åringar	Tal- och antalsuppfattning (talpar, tallinjen), aritmetiska basfärdigheter (addition och subtraktion), förståelse för matematiska samband (uppdelning av tal) visuospaciala färdigheter, problemlösning, arbetsminnet	Gratis tillgängligt via: https://cognitionmatters.org/se/

och rationella tal) samt tal och antalsuppfattning. Detta har även diskuterats i tidigare internationell forskning (Jitendra m.fl., 2018). Till exempel Jordan, Resnick, Rodrigues, Hansen & Dyson (2017) anser att förmågan att placera tal på rätt plats på en tallinje starkt korrelerar med senare förmåga att räkna med bråktal, vilket kunde tränas genom interventioner. Eftersom ny teknologi erbjuder nya möjligheter

att använda digitala plattformar och spel för att stödja elever med inlärningsssvårigheter, både i skolan och hemma (Langfus m.fl., 2019; Ramani, Daubert & Scalise, 2019) är detta något som vi även i Finland borde dra nytta av när vi utvecklar nya inlärningsverktyg. Utbudet av interventionsprogram för svenskspråkiga elever i Finland är, precis som fallet är med kartläggningsverktygen, väldigt begränsat. Ef-

tersom det existerar ett antal forskningsbaserade interventionsprogram på finska (t.ex. ThinkMath; www.thinkmathglobal.com) skulle dessa med fördel kunna över sättas.

Den här studien innehåller en del begränsningar. För det första har vi valt att endast undersöka de kartläggningsverktyg och interventionsprogram som är forskningsbaserade. För det andra har vi valt att enbart granska kartläggningsverktyg och interventionsprogram som är tillgängliga på svenska och lämpade för finlandssvenska förhållanden. Om vi även skulle ha inkluderat de läroplansbaserade kartläggningsverktyg och icke-forskningsbaserade interventionsprogram som finns och/eller analyserat material tillgängligt på finska, så skulle studien ha varit mer övergripande. Vi anser dock att det är av stor betydelse att verktygen baserar sig på gedigen forskning för att säkra validiteten, samt att de kartläggningsverktyg och interventionsprogram som vi använder är kulturellt och språkligt anpassade för elever i Svenskfinland.

Tidig identifiering och tidiga stödinsatser för att förebygga inlärningssvårigheter i matematik är viktigt (Bryant m.fl., 2008; Dennis m.fl., 2016). Detta innebär att lärarna bör ha tillgång till kartläggningsverktyg och interventionsprogram baserade på de nyaste rönen kring lärande och utveckling. Dessa kartläggningsverktyg och interventionsprogram bör vara forskningsbaserade, och innefatta de grundläggande matematikfärdigheter som forskning har bevisat vara centrala för utvecklingen av matematiska färdigheter. Samarbete mellan forskare och lärare är av största

betydelse för att nödvändiga instrument ska utvecklas så snabbt som möjligt. Med den här studien vill vi synliggöra de forskningsbaserade kartläggningsverktyg och interventionsprogram som finns tillgängliga på svenska, och lyfta fram de centrala färdigheterna i matematik samt utvecklingsmöjligheterna. Vi hoppas att lärarna kan få verktyg för att kunna uppmärksamma vilka elever som behöver stöd, och idéer om hur dessa elever kan stödjas för att optimera sin matematiska utveckling. Eftersom vår studie visar att tillgången på forskningsbaserade kartläggnings- och interventionsmaterial för de finlandssvenska eleverna är begränsad och till vissa delar delvis bristfällig och föråldrad, skulle det vara viktigt att materialen utvecklas och uppdateras.

INFORMATION OM FÖRFATTARNA:

Ulrika Ekstam (PhD) är vikarierande lektor i matematikens didaktik vid Helsingfors universitet.

Heidi Hellstrand (PeM) är doktorand vid Åbo Akademi och speciallärare vid Vasa övningsskola.

Johan Korhonen (PeD) är universitetslärare vid Åbo Akademi i Vasa och docent (specialpedagogik) vid Helsingfors universitet.

Pirjo Aunio (PeD) är professor i specialpedagogik vid Helsingfors universitet.

REFERENSER

- Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense*. London: Continuum.
- Ansari, D. (2015). No More Math Wars—an evidence based, developmental perspective on math education. Canadian Education Association (CEA). Education Canada. Retrieved from <http://www.cea-ace.ca/education-canada/article/no-more-math-wars>
- Aubrey, C. & Godfrey, R. (2003) The development of children's early numeracy through key stage 1. *British Educational Research Journal*, 29(6) 821–840. doi:10.1080/0141192032000137321

- Aunio, P. (2019a). Small group interventions for children aged 5–9 years old with learning difficulties in mathematics. In A. Fritz-Stratmann, V. Haase & P. Räsänen (Eds), *International Handbook of math learning difficulties. From the laboratory to the classroom*, (pp. 709–731). Brazil: Springer.
- Aunio, P. (2019b). Early numeracy skills learning and learning difficulties – evidenced-based assessment and interventions. In D. C., Geary, D. B., Berch & K. Mann Koepke (Eds), *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning. Mathematical Cognition and Learning*, 5th ed., (pp. 105–214). Academic Press. Cambridge. doi:10.1016/B978-0-12-815952-1.09990-4
- Aunio, P., Hautamäki, J. & Mononen, R. (2018). Pedagoginen arviointityö ja matemaattiset oppimisvaikeudet [Assessment and mathematical learning difficulties]. In Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. *Matematiikan opetus ja Oppiminen [Mathematical instruction and learning]*, (pp. 240–257). Niilo Mäki Institute, Jyväskylä.
- Aunio, P., Hautamäki, J. & Van Luit, J.E.H. (2005). Mathematical thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. *European Journal of Special Needs Education*, 20(2), 131–146.
- Aunio, P., Laine, A. & Räsänen, P. (manuskript). Core mathematical skills in 9–12 years old children.
- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 427–435. doi:10.1016/j.lindif.2010.06.003
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704, doi:10.1080/1350293X.2014.996424
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M-K. & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 4, 699–713. doi:10.1037/0022-0663.96.4.699
- Bailey, D. H., Nguyen, T., Jenkins, J. M., Domina, T., Clements, D. H. & Sarama, J. S. (2016). Fadeout in an early mathematics intervention: Constraining content or preexisting differences? *Developmental Psychology*, 52(9), 1457–1469. doi:10.1037/dev0000188
- Banerjee, P. A. & Lamb, S. (2016). A systematic review of factors linked to poor academic performance of disadvantaged students in science and maths in schools. *Cogent Education*, 3. doi:10.1080/2331186X.2016.1178441
- Barnes, H. (2005). The theory of realistic mathematics education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras*, 61, 42–57. doi:10.4102/pythagoras.v0i61.120
- Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A. & Blomert, L. (2014). Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research in Developmental Disabilities*, 35(3), 657–670. doi:10.1016/j.ridd.2013.12.010
- Bryant, B. R. & Bryant, D. P. (2008). Introduction to special series: Mathematics and learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 31(1), 3–11. doi:10.2307/30035521
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N. & Chavez, M. M. (2008). Mathematics intervention for the first- and second- grade students with mathematics difficulties: The effects of tier 2 intervention delivered as booster lessons. *Remedial and Special Education*, 29(1), 20–32. doi:10.1177/0741932507309712
- Carr, M. & Hettinger, H. (2003). The development of math competence in the preschool and early school years. In J.M. Royer (Ed.), *Mathematical Cognition* (pp. 1–32). Greenwich, CN: Information Age publishing.
- Chodura S., Kuhn J. T. & Holling H. (2015). Interventions for children with mathematical difficulties: a meta-analysis. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(2), 129–144. doi:10.1027/2151-2604/a000211
- Codding, R. S., Burns, M. K. & Lukito, G. (2011). Meta-analysis of mathematic basic-fact fluency interventions: A component analysis. *Learning Disabilities Research & Practice*, 26, 36–47. doi:10.1111/j.1540-5826.2010.00323.x
- Cognition Matters-nättjänst. www.cognitionmatters.org (30.1.2019).
- Cragg, L., Keeble, S., Richardson, S., Roome, H. E. & Gilmore, C. (2017). Direct and indirect influences of executive functions on mathematics achievement. *Cognition*, 162, 12–26. doi:10.1016/j.cognition.2017.01.014
- Dennis, M. S., Sharp, E., Chovanes, J., Thomas, A., Burns, R. M., Custer, B. & Park, J. (2016). A meta-analysis of empirical research on teaching students with mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 31(3), 1–13. doi:10.1111/ldrp.12107
- De Smedt, B. & Gilmore, C. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 278–292. doi:10.1016/j.jecp.2010.09.003
- De Smedt, B., Noël, M.P., Gilmore, C. & Ansari D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 48–55. doi:10.1016/j.tine.2013.06.001

- Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerd, F. & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 64–81. doi:10.1348/2044-8279.002002
- Dowker, A. (2005). Individual Differences in Arithmetic. Implications for Psychology, Neuroscience and Education. Hove: Psychology Press.
- Dowker, A. & Sigley, G. (2010). Targeted interventions for children with arithmetical difficulties. *British Journal of Educational Psychology Monographs*, 11, 7(7), 65–81. doi:10.1348/9781854337000 9X12583699332492
- Dyson, N.I., Jordan, N.C. & Glutting, J. (2013). A number sense intervention for low-income kindergartners at risk for mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 46(2), 166–81, doi:10.1177/0022219411410233.
- European Commission, (2013). Addressing low achievement in mathematics and science. Final Report of the Thematic Working Group on Mathematics, Science and Technology (2010–2013). http://ec.europa.eu/education/policy/strategic-framework/archive/documents/wg-mst-final-report_en.pdf
- Fischer, U., Moeller, K., Cress, U. & Nuerk, H.-C. (2013). Interventions supporting children's mathematics school success: A meta-analytic review. *European Psychologist*, 18, 89–113. doi:10.1027/1016-9040/a000141
- Fritz, A., Ehlert, A. & Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education* 3(1), 38–67. doi:10.4102/sajce.v3i1.31
- Fuchs, L., Fuchs, D. & Hollenbeck, K. (2007). Extending responsiveness to intervention to mathematics at first and third grades. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 13–24. doi:10.1111/j.1540-5826.2007.00227.x
- Geary, D. C. (2010). Mathematical learning disabilities. In J. Holmes (Ed.), *Advances in Child Development and Behavior*, Vol. 39, (pp. 45–77). Burlington: Academic Press.
- Geary, D. C. (2013). Learning disabilities in mathematics; recent advances. In H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (Red.), *Handbook of learning Disabilities*, (2nd ed., pp. 239–255). New York, NY: Guilford.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78, 1343–1359. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x
- Geary, D. C., Hoard, M., Nugent, L. & Bailey, D. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 206–223. doi:10.1037/a0025398
- Geary, D.C., Nicholas, A. Li, Y. & Sun, J. (2017) Domain-specific knowledge on mathematics achievement: An eight-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 109(5), 680–693. doi:10.1037/edu0000159
- Geary, D. C., vanMarle, K., Chu, F. W., Rouders, J., Hoard, M. K. & Nugent, L. (2018). Early conceptual understanding of cardinality predicts superior school-entry number-system knowledge. *Psychological Science*, 29(2), 191–205. doi:10.1177/0956797617729817
- Gelman, R. & Gallistel, C. (1978) *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA. Harvard University Press.
- Gersten, R., Chard, D.J., Jayanthi, M., Baker, S.K., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242. doi:10.3102/0034654309334431
- Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–304. doi: 10.1177/00222194050380040301
- Griffin, S. (2003). *The Development of Math Competence in the Preschool and Early School Years*. In J.M. Royer (Ed.) *Mathematical Cognition* (pp. 1–32). Greenwich, CN: Information Age publishing.
- Hakkarainen, A., Holopainen, L. & Savolainen H. (2016). The impact of learning difficulties and socioemotional and behavioural problems on transition to postsecondary education or work life in Finland: a five-year follow-up study, *European Journal of Special Needs Education*, 31(2), 171–186, doi:10.1080/08856257.2015.1125688
- Haylock, D. & Cockburn, A. (2008). *Understanding Mathematics for Young Children. A guide for foundation stage and lower primary teachers*. London: Sage.
- Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. In: Fritz A., Haase V., Räsänen P. (eds) *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Springer, Cham.
- Hsieh, H. F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277–1288. doi:10.1177/1049732305276687

- Jitendra, A. K., Lein, A. E., Im, S. H., Alghamdi, A. A., Hefte, S. B. & Mouanoutoua, J. (2018). Mathematical interventions for secondary students with learning disabilities and mathematics difficulties: A meta-analysis. *Exceptional children*, 84(2), 177–196. doi:10.1177/0014402917737467
- Jordan, N. C., Glutting, J. & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 82–88. doi:10.1016/j.lindif.2009.07.004
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology* 45(3), 850–867. doi:10.1037/a0014939
- Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N. & Dyson, N. (2017) Delaware longitudinal study of fraction learning: Implications for helping children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6) 621–630. doi:10.1177/0022219416662033
- Jordan, N. C., Rodrigues, J., Hansen, N. & Resnick, I. (2017). Fraction development in children: Importance of building numerical magnitude understanding. In D. C.
- Geary, D. C., Berch, D. B., Ochsendorf, R. & Koepke, K. M. (Eds.). (2017). (Ed.), *Mathematical cognition and learning: Vol. 3. Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 125–140). San Diego, CA, US: Elsevier Academic Press. doi:10.1016/B978-0-12-805086-6.00006-0
- Koponen, T., Salminen, J., Aunio, P., Polet, J. & Hellstrand, H. jne. (2011). *LukiMat – Bedömning av lärandet: Identifiering av stödbehov i matematik*. Niilo Mäki Institutet.
- Koponen, T., Salmi, P., Eklund, K. & Aro, T. (2013). Counting and RAN: Predictors of arithmetic calculation and reading fluency. *Journal of Educational Psychology*, 105(1) 162–175. doi:10.1037/a0029285
- Korhonen, J., Linnanmäki, K. & Aunio, P. (2014). Learning difficulties, academic well-being and educational dropout. *Learning and individual differences*, 34, 1–10. doi:10.1016/j.lindif.2013.12.011
- Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19(6), 513–526. doi:10.1016/j.learninstruc.2008.10.002
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schonmann, C., Plangger, F., Galli, M., Martin, E. & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, 57(3), 782–95. doi:10.1016/j.neuroimage.2011.01.070
- Langfus, J., Maiche, A., De León, D., Fitipalde, D., Mailhos, Á. & Halberda, J. (2019). The effects of SES, grade-repeating and IQ in game-based approximate math intervention. In D. C., Geary, D. B., Berch & K. Mann Koepke (Eds), *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning. Mathematical Cognition and Learning*, 5th ed., (pp. 37–67). Academic Press. Cambridge. doi:10.1016/B978-0-12-815952-1.00002-5.
- Locuniak, M. N. & Jordan, N.C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of learning disabilities*, 41(5), 451–459. doi:10.1177/0022219408321126.
- Lukimat-nättjänst. www.lukimat.fi (30.1.2019).
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. & Lehtinen, E. (2013). *Nallematte*. Jyväskylä: Niilo Mäki Institutet.
- Mazzocco, M. M. M. (2007). Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Red.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*, (pp. 29–48). Baltimore, MD: Paul H. Brookes.
- Mazzocco, M. M. M. & Devlin, K. T. (2008). Parts and “holes”: Gaps in rational number sense in children with vs. without mathematical learning disability. *Developmental Science*, 11, 681–691. doi:10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x
- Mazzocco, M. M. M., Devlin, K. & McKeeney, S. (2008). Is it a fact? Timed arithmetic performance of children with mathematical learning disabilities (MLD) varies as a function of how MLD is defined. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 318–344. doi:10.1080/87565640801982403
- Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L. & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, 82, 1224–1237. doi:10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x
- Mazzocco, M.M. & Räsänen, P. (2013) Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 65–73. doi:/10.1016/j.tine.2013.05.001
- Mazzocco, M. M. & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research and Practice*, 20(3), 142–155. doi:10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x
- McCrink, K. & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science* 15(11), 776–81. doi:10.1111/j.0956-7976.2004.00755.x

- Merkley, R. & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 10, 14–20. doi:10.1016/j.cobeha.2016.04.006
- Mononen, R., Aunio, P., Koponen, T. & Aro, M. (2014). A review of early numeracy interventions for children at risk in mathematics. *International Journal of Early Childhood Special Education* 6 (1), 25–54. doi:10.20489/intjecse.14355.
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). Matemaattiset oppimisvaikeudet. PS-Kustannus. Juva.
- Moura, R., Wood, G., Pinheiro-Chagas, P., Lonnemann, J., Krinzing, H., Willmes, K. ... Haase, V. G. (2013). Transcoding abilities in typical and atypical mathematics achievers: The role of working memory and procedural and lexical competencies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(3), 707–727.
- Niilo Mäki Institutet. Spel-Ett-Matematik-nätjänst. www.lukimat.fi (30.1.2019).
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2016). Low-performing students: Why they fall behind and how to help them succeed. OECD Publishing, Paris. doi:10.1787/9789264250246-en
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D. & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition* 116, 33–41. doi:10.1016/j.cognition.2010.03.012
- Ramani, G.B., Daubert, E. & Scalise, N. (2019) Role of play and games in building children's foundational numerical knowledge. In D. C., Geary, D. B., Berch & K. Mann Koepke (Eds), *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning*. *Mathematical Cognition and Learning*, 5th ed., (pp. 69–90). Academic Press. Cambridge. doi:10.1016/B978-0-12-815952-1.00003-7
- Räsänen, P., Dehaene, S., Maslov, O. m.fl. (2012). The Number Race, version 3. Tal i farten. www.lukimat.fi (30.1.2019).
- Räsänen, P., Korhonen, J., Laakso, M.-J., Hakkarainen, A., Väisänen, E., Ekstam, U., Laine, A. & Aunio, P. (2019). FUN-A. Functional Numeracy Assessment. Turku: University of Turku.
- Räsänen, P., Linnanmäki, K., Haapamäki, C. & Skagersten, D. (2008). RMAT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 9–12 år. Niilo Mäki Institutet.
- Räsänen, P., Linnanmäki, K., Kronberg, N. & Uppgård, A. (2013). KTLT – Test av räknefärdighet hos elever i åldern 13–16 år. Niilo Mäki Institutet.
- Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children. New York, NY: Routledge.
- Sasanguie, D., Smedt, B.D., Defever, E. & Reynvoet, B. (2012). Association between basic numerical abilities and mathematics achievement. *The British journal of developmental psychology*, 30(2), 344–357.
- Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Schmidt, S., Stricker, J. & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental science*, 20, e12372. doi: 10.1111/desc.12372
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691–697. doi:10.1177/0956797612440101
- Skaar Davidsen, I.K., Løge, H., Lunde, E., Reikerås, T. & Dalvang, O. (2012). *Handledning till MIO: Matematiken – Individiden – Omgivningen*. Lund: Studentlitteratur.
- Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4, 259–309. doi:10.1016/1041-6080(92)90005-y
- ThinkMath-nätjänst. www.thinkmathglobal.com (30.1.2019).
- Toll, S. & Van Luit, J.E.H. (2014). Effects of remedial numeracy instruction throughout kindergarten starting at different ages: Evidence from a large-scale longitudinal study. *Learning and instruction*, 33, 39–49. doi:10.1016/j.learninstruc.2014.03.003
- van de Rijt, B., Godfrey, R., Aubrey, C., van Luit, J. E. H., GhesquiÈre, P., Torbeyns, J., ... Tzouriadou, M. (2003) The development of early numeracy in Europe. *Journal of Early Childhood Research*, 1(2) 156–180. doi:10.1177/1476718X030012002
- Wright, R.J., Ellemor-Collins, D. & Tabor, P. 2012. *Developing number knowledge: Assessment, teaching and intervention with 7- to 11-year-olds*. London: Sage.
- Wright, R. J., Martland, J. & Stafford, A. K. (2006). *Early numeracy – Assessment for teaching and intervention*. London: Paul Chapman.
- Zhang, X., Räsänen, P., Koponen, T., Aunola, K., Lerkkanen, M. & Nurmi, J. (2018). Early Cognitive Precursors of Children's Mathematics Learning Disability and Persistent Low Achievement: A 5-Year Longitudinal Study. *Child Development*. doi:10.1111/cdev.13123