

Aino Mattinen
 Pekka Räsänen
 Minna M. Hannula
 Erno Lehtinen

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämishjelma päiväkodeille

Tässä artikkelissa esitellään Niilo Mäki Instituutin oppimisvaikeuksien varhaiskuntoutushankkeessa kehitettyä ja Raha-automaattiyhdistyksen rahoittamaa Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämishjelmaa. Artikkelissa esitellään kehittämishjelman tarkoitusta ja tavoitteita, teoreettista taustaa ja teoreettisen taustan pohjalta luotua käytännön toteuttamismallia. Artikkelin lopussa luodaan katsaus syksyllä 2008 alkavaan varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämishjelman vaikuttavuustutkimukseen, joka toteutetaan yhteistyössä Niilo Mäki Instituutin ja Turun yliopiston kanssa.

Asiasanat: Yleiset oppimisvalmiudet, varhaiset matemaattiset oppimisvalmiudet, kielellinen laskeminen, välittävä ohjaaminen, metakognitio, yleistäminen

Useimmat lapsille tarkoitetut matemaattiset ohjelmat ja opetus suunnitelmat on suunnattu esikouluikäisille ja sitä vanhemmille lapsille. Tässä suhteessa varhaisten matemaattisen oppimisvalmiuksien kehittämishjelma tekee poikkeuksen, sillä se on suunniteltu toteutettavaksi 3–5-vuotia-

aiden lasten kanssa päiväkodin toiminnan yhteydessä. Kehittämishjelma on ensisijaisesti tarkoitettu tukemaan sellaisia lapsia, joilla neljän vuoden ikään mennessä on tunnistettavissa puutteita matemaattisten taitojen lisäksi myös muilla oppimisen alueilla. Tarkoituksena on taata mahdollisimman varhaisessa vaiheessa tapahtuva oppimisen ongelmien tunnistaminen ja nopea tukitoimien aloittaminen.

Nallematikaksi kutsumamme kehittämishjelman tavoitteena on lasten matemaattisten taitojen ja yleisten oppimisvalmiuksien kehittäminen siten, että lapset alkaisivat itsenäisesti kiinnittää huomiota ympäristössään esiintyviin matemaattisiin ilmiöihin sekä ohjata matemaattista toimintaansa. Tavoitteena on, että leikinomaisen matemaattisen ongelmanratkaisun yhteydessä harjoitellut toiminnanohjaukselliset taidot siirtyvät myös muille oppimisen alueille. Kehittämishjelman tavoitteena on myös ohjata päiväkodin henkilökuntaa tunnistamaan ja tukemaan lasten oppimisvalmiuksien kehittymistä yhteistyössä lasten vanhempien kanssa.

Kehittämishjelma tarjoaa päiväkodin henkilökunnalle vahvalle teoreettisel-

le pohjalle rakentuvan toimintamallin ja materiaalin, joka on helppo ottaa käyttöön ja jossa teoreettiset periaatteet toteutuvat ohjelmaa noudattamalla. Lapsia autetaan tarkkailemaan ja suunnittelemaan omaa toimintaansa ja rakentamaan merkityksiä matemaattisille käsitteille sadun, leikin ja toiminnallisten menetelmien avulla. Nallematikan kontekstina on karhuperhe, jonka elämään matemaattiset asiat liittyvät. Yhteisen oppimisen lähtökohtana on Pikkukarhun kohtaama ongelma tai Pikkukarhun tekemä suuri matemaattinen keksintö. Pikkukarhun tekemät virheet saavat lapset auttamaan ja neuvomaan Pikkukarhua. Nallematikassa matemaattisten ilmiöiden tarkastelu liittyy lapsen kokemusmaailmaan ja tuttuihin arkipäivän tilanteisiin. Toimintamalli sisältää kerran viikossa tapahtuvan pienryhmätoiminnan sekä pienryhmässä käsiteltyjen asioiden integroimisen päiväkodin muuhun toimintaan. Lisäksi ohjelma tarjoaa mallin soveltaa opittuja asioita lasten ja aikuisten kahdenkeskisiin vuorovaikutustilanteisiin päiväkodissa ja kotona. Seuraavassa luodaan katsaus Nallematikan teoreettiseen taustaan.

YLEISTEN OPPIMISVALMIUKSIEN TEOREETTINEN TAUSTA

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma perustuu sosiokulttuurisiin teorioihin (esim. Rogoff, 1990; Vygotsky, 1978), kognitiivisia kuntoutus- ja rikastamisohjelmia ohjaaviin keskeisiin periaatteisiin (Ashman & Conway, 1989; de Bono, 1991; Feuerstein, Rand, Hoffman & Miller, 1980; Greenberg, 2000; Guilford, 1977; Heiman, 1991; Haywood, Brooks & Burns, 1992; Lipman, 1991; Meeker, 1991; Wright, 1991) ja varhaisten matemaattisten tai-

tojen kehittymistä ja kehittämistä käsitteleviin teorioihin ja tutkimuksiin (esim. Case, 1996; Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978; Resnick & Greeno, 1990; Spelke 2003; Wynn, 1992a, 1992b). Kehittämisohjelmassa lasten yleisten oppimisvalmiuksien ja varhaismatemaattisten taitojen harjoittelu tapahtuu samanaikaisesti ja vuorovaikutuksessa sosiaalisen ympäristön kanssa.

Lapsia ohjataan kiinnittämään huomiota lukumääriin ja lukuihin. Tämä tarkoittaa sekä niihin liittyvää käsitteellistä tietoa että menetelmätietoa siitä, miten lukuja ja lukumääriä voidaan verrata, lisätä tai vähentää, liittää yhteen tai ottaa erilleen. Matemaattisen sisältötiedon lisäksi oppimisen kohteena on tehtävien ja ongelmien ratkaisemisessa tarvittavat yleisemmät kognitiiviset prosessit ja strategiat. Matemaattinen toiminta voidaan nähdä välineenä, jonka avulla lapsi harjoittelee oman oppimisensa, muistamisensa ja ongelmanratkaisutaitojensa tarkkailemista, selittämistä ja ohjaamista.

Sosiaalinen ympäristö lapsen oppimisen ja kehityksen tukena

Sosiokulttuuristen teorioiden mukaan kulttuuristen välineiden kuten matemaattisten käsitteiden omaksuminen tapahtuu lapsen ja aikuisen osallistuessa sosiaaliseen vuorovaikutukseen lapsen lähikehityksen vyöhykkeellä (Vygotsky, 1978). Näissä vuorovaikutustilanteissa aikuinen ja lapsi toimivat yhteistyössä rakentamalla siltaa lapsen nykyisestä ymmärryksestä ja tiedoista kohti lapsen tulevaa ymmärtämistä ja taitojen kehittymistä (Rogoff, 1990). Mitä varhaisemmassa taidon oppimisen vaiheessa lapsi on, sitä enemmän hän tarvitsee aikuisen tukea. Lapsen taitojen kehittymisen myötä aikuinen vähentää tarjoamansa tuen määrää. Tällöin uuden taidon oppiminen etenee yhteisen toiminnan ta-

solta taidon itsenäisen käyttämisen tasolle.

Sosiokulttuurisiin näkemyksiin pohjautuvat myös ne kognitiiviset kuntoutus- ja kehittämisohjelmat (Ashman & Conway, 1989; de Bono, 1991; Feuerstein, Rand, Hoffman & Miller, 1980; Greenberg, 2000; Guilford, 1977; Heiman, 1991; Haywood, Brooks & Burns, 1992; Lipman, 1991; Meeker, 1991; Wright, 1991), joiden keskeisiä teoreettisia periaatteita on sovellettu varhaisten matemaattisten taitojen kehittämisohjelmaan. Lähtökohtana näissä kehittämis- ja rikastamisohjelmissa on näkemys siitä, että lasten kognitiivisiin prosesseihin, esimerkiksi ajattelemiseen, oppimiseen, muistamiseen ja ongelmanratkaisutaitoihin, voidaan ympäristön suotuisan tuen avulla vaikuttaa. Näin ollen lasta voidaan ohjata tarkoituksenmukaisten oppimistaitojen omaksumiseen välittävän ohjauksen avulla.

Välittävä ohjaaminen

Välittävällä ohjaamisella (Feuerstein ym., 1980) tarkoitetaan, että lasta voidaan auttaa mukauttamaan kognitiivinen toimintansa ottamaan vastaan, jäsentämään ja käsittelemään ympäristön ilmiöitä, tapahtumia ja tilanteita. Lapsen kognitiivisten rakenteiden kehittyminen tapahtuu lapsen ja ympäristön välillä sekä suorana altistumisena ympäristön ärsykeisiin että välittävänä oppimiskokemuksena. Suora altistuminen tarkoittaa omakohtaisia havaintoja ja kokemuksia ympäristön ilmiöistä ja tapahtumista. Välittävä oppimiskokemus puolestaan tarkoittaa tapaa, jolla vanhemmat, hoitajat tai opettajat ohjaavat lasta kohtaamaan ympäristössä esiintyviä ärsykeitä. Välittävän vuorovaikutuksen avulla lapsi omaksuu uusia toimintamalleja ja oppii myös itse valitsemaan yhä tarkoituksenmukaisempia strategioita, jotka auttavat häntä ennakoimaan, kohtaamaan ja jäsentämään ympäristön suoria ärsyke-

keitä ja tapahtumia. Lasten kiinnostusta ympäristön ilmiöiden tutkimiseen ja saatavilla olevan tiedon jäsentämiseen voidaan tukea vahvistamalla lapsen sisäistä ja tehtäväsuuntautunutta motivaatiota.

Sisäinen tehtäväsuuntautunut motivaatio

Lapsen kokemukset ympäristön ilmiöistä ja tapahtumista sekä hänen saamansa palaute tutkimisestaan vaikuttavat sisäisen ja tehtäväsuuntautuneen motivaation muodostumiseen. Lapsen tutkiva toiminta saattaa vähentyä, mikäli hän ei kiinnitä huomiota toimintansa seurauksiin ja saatavilla olevaan tietoon tai hän kohtaa esteitä varhaisissa tutkimisissaan. Tällöin lapselle kehittyy vähäinen tietomäärä, jonka varassa toimia uusissa tilanteissa. Tällä on vuorostaan vaikutusta kognitiiviseen kehitykseen. Lapset, jotka hankkivat kokemuksia maailmasta tutkivan toiminnan avulla ja joiden tutkivaa toimintaa tuetaan, vahvistavat tutkimustapojaan. Samalla heidän tieto- ja taitovarastonsa kasvavat, jolloin heille kehittyy tehtäväsuuntautunut orientaatio. Motivaation ja kognitiivisten rakenteiden kehittyminen tapahtuu vuorovaikutuksessa toisiinsa liittyneinä ja toinen toistaan vastavuoroisella tavalla ruokkien (Haywood, ym. 1992). Lapsen kognitiivisen kehityksen ja itseohjautuvuuden kannalta olisi tärkeää, että lapsi saisi kokemuksia siitä, että hän voi itse vaikuttaa omaan oppimiseensa (Ashman & Conway, 1989). Oman oppimisen ohjaamisessa ja oppimiseen liittyvien tunteiden ja motivaation ymmärtämisessä keskeinen käsite on metakognitio.

Metakognitiivinen tieto ja taito, metakognitiiviset kokemukset

Monilla heikoilla ongelmaratkaisijoilla ei ole juurikaan tietoa omasta kognitiivisesta toiminnastaan. Heillä on puutteita strate-

gioiden käytössä ja opittujen strategioiden siirtämisessä uusien tilanteiden yhteyteen. Näiden lasten kohdalla harjoittelun tulisi kohdistua erityisesti kognitiivisen tiedon ja kokemusten ymmärtämiseen sekä itse-sääteilytaitojen kehittämiseen (Campione, 1987).

Flavell (1987) jakaa metakognition käsitteen 1) metakognitiiviseen tietoon, 2) metakognitiivisiin kokemuksiin ja 3) metakognitiiviseen taitoon toimia metakognitiivisen tiedon pohjalta. Metakognitiivinen tieto sisältää tietoisuuden itsestä oppijana, tietoisuuden erilaisten tehtävien edellyttämistä toimintatavoista ja vaatimuksista sekä tiedon strategioista ja niiden merkityksestä tavoitteiden saavuttamisen kannalta. Metakognitiiviset kokemukset ovat tietoisia kokemuksia, jotka usein liittyvät meneillään olevaan älylliseen toimintaan ja tunteisiin. Ne voivat olla kokemuksia, jotka liittyvät tunteeseen ymmärtämisen, oppimisen tai muistamisen helppoudesta tai vaikeudesta.

Metakognitiivisella toiminnalla tarkoitetaan taitoja oman toiminnan ohjaamiseen ja sääteilyyn tilanteen tulkinnan pohjalta. Tällöin yksilö metakognitiivisen tiedon ja aikaisempien metakognitiivisten kokemusten pohjalta pyrkii tunnistamaan ja arvioimaan käsillä olevia tehtäviä sekä suunnittelemaan ja sopeuttamaan toimintansa tehtävän tavoitteiden ja vaatimusten sekä omien pyrkimyksiensä ja edellytystensä mukaisella tavalla. Tehtävän suorittamisessa on mukana jatkuvaa oman toiminnan valvontaa ja sääteilyä sekä käytettyjen strategioiden tehokkuuden arviointia.

Metakognitioita voidaan edistää harjoittamalla suunnittelutaitoja. Tällöin lasta ohjataan tunnistamaan ja suhteuttamaan toisiinsa menneitä, tulevia ja nykyisiä tapahtumia. Varastoituaan muistiinsa erilaisia henkilö-, tehtävä- ja strategiatekijöitä lapsi voi tunnistaa tulossa olevaa tietoa.

Auttamalla lasta luomaan tarkkoja mielikuvia menneestä, nykyhetkestä ja tulevasta, tarjotaan hänelle mahdollisuuksia metakognitiiviseen kehittymiseen. Lapsen kognitiiviseen toimintaan – esimerkiksi tiedonkäsittely-, ongelmanratkaisu- ja suunnittelutaitoihin – liittyvien vahvuuksien ja heikkouksien tunnistamista ja ohjauksen oikeaa kohdentamista voidaan helpottaa kohdistamalla tarkastelu kognitiivisen toiminnan peräkkäisiin vaiheisiin.

Kognitiivisen toiminnan vaiheet

Kognitiiviseen toimintaan liittyvä tiedon käsitteleminen etenee kolmen toisiaan seuraavan vaiheen kautta. Nämä vaiheet jaetaan tiedon vastaanottamisen, tiedon käsittelemisen ja vastauksen tuottamisen vaiheisiin (Feuerstein, ym. 1980). Näistä vaiheista tiedon vastaanottovaihe on erityisen merkityksellinen, sillä se vaikuttaa seuraavien vaiheiden onnistumiseen. Ellei lapsi kiinnitä riittävästi huomiota saatavilla olevaan tietoon, heijastuvat seuraukset myös tiedon käsittely- ja vastausvaiheeseen (de Bono, 1991). Lisäksi vastaanotetun/hankitun tiedon muistamista auttaa, jos sen ilmaisee kielellisessä tai kuvallisessa muodossa tai vaikkapa eleiden avulla (Ashman & Conway, 1989). Tiedon käsittelemisvaiheessa lasta ohjataan järjestämään saatavilla oleva tieto käsiteltävään muotoon esimerkiksi luokittelemalla, tarkastelemalla luokkien välisiä suhteita ja etsimällä tiedon sisältämiä samanlaisia ja erilaisia piirteitä. Vaihe voi sisältää myös erilaisten vaihtoehtojen tarkastelemista ja valitsemista sekä erilaisten päättelyketjujen käyttämistä. Vastausvaihe sisältää toiminnan tarkistamisen ja vastauksen luotettavuuden arviointia. Tällöin on tärkeää tunnistaa vastauksessa ilmenevä ristiriita ja päätellä, mistä se johtuu (Wright, 1991). Oppimisvalmiuksien tukemisessa tiedon vastaanottamista, käsittelemistä ja vasta-

uksen tuottamista voidaan helpottaa auttamalla lasta omaksumaan tarvittavia käsitteitä.

Merkitysten hankkiminen käsitteille

Käsitteiden muodostamisen taitoja, käsitteiden ja mielikuvien avulla tapahtuvaa ajattelua ja täsmällistä ilmaisua pidetään keskeisenä tekijöinä kognitiivisten taitojen kehittämisessä (esimerkiksi de Bono, 1991; Greenberg, 2000; Lipman, 1991). Havaintojen kielellinen ilmaiseminen auttaa muistamaan asioita ja palauttamaan niitä muistista (Meeker, 1991). Kielellisen ilmaisemisen lisäksi tietoa tulee esittää myös kuvien, symbolien ja eleiden muodossa (Ashman & Conway, 1989; Feuerstein, 1980; Heiman, 1991; Wright, 1991). Lasten oppimisvalmiuksien kehittämisessä keskeisenä menetelmänä pidetään lasten aktiivista tuottavaa toimintaa. Tällöin aikuinen auttaa lasta muodostamaan merkityksiä toiminnassa esiintyvillä sanoilla ja käsitteillä (Rogoff, 1990). Edellä esitetty tarkoittaa, että opittavaan asiaan liittyviä käsitteitä käytetään ja tutkitaan yhteisen toiminnan ja leikkitilanteiden yhteydessä. Toiminnan ja siihen liittyvän keskustelun avulla rakennetaan ja tarkennetaan myös keskeisten ja tärkeiden käsitteiden merkitystä ja luodaan jaettuja merkityksiä (Lipman, 1991; Greenberg, 2000). Tällöin opittavaan asiaan liittyvät käsitteet ja niiden avulla tapahtuva toiminta voidaan ottaa jaetun havainnoinnin ja yhteisen kiinnostuksen kohteeksi.

Jaettu havainnointi, yhteinen tiedonmuodostus

Olemalla vuorovaikutuksessa sosiaalisen ympäristön kanssa lapsi tulee osalliseksi siitä, miten ihmiset hänen ympäristössään käsittävät ilmiöt ja selittävät niitä (Ruff & Rothbart, 1996). Lapsen ja aikuisen jaettuun opetus-oppimisvuorovaikutukseen

vaikuttavat kolme sosiokognitiivista prosessia, jotka ovat 1) intersubjektiivisuus, 2) jaettu havainnointi ja 3) sosiaalinen viittaaminen. Intersubjektiivisuudella tarkoitetaan tilannetta tai asiaa, jonka lapsi ja aikuinen tulkitsevat samalla tavalla. Jaettu havainnointi tarkoittaa huomion kiinnittämistä yhteiseen kohteeseen ja tietoisuutta siitä, että molemmat osapuolet kiinnittävät huomiota samaan asiaan, ilmiöön tai tapahtumaan. Sosiaalinen viittaaminen tarkoittaa, että lapsi aikuisen reagointia tarkastelemalla hankkii tietoa jaetun havainnoinnin kohteena olevasta asiasta ja sen merkityksellisyydestä.

Yhteistoiminnallinen oppiminen ja yhteiseen tiedonmuodostukseen liittyvien kognitiivisten prosessien tarkastelu nähdään onnistuneena menetelmänä hankkia välittäviä oppimiskokemuksia (Ashman & Conway, 1989; de Bono, 1991; Feuerstein, ym., 1980; Greenberg, 2000; Haywood, ym., 1992; Lipman, 1991; Wright, 1991). Lapsia tulisikin rohkaista tuomaan oppimisympäristöön asioita, joista he ovat kiinnostuneita ja joita he haluavat jakaa ja pohtia toisten kanssa. Samalla uusien asioiden oppimisen tulisi olla yhteisen kiinnostuksen ja tutkimisen kohteena. Opettajan tehtävänä olisi tällöin luoda jaettu tiedonmuodostamisen ja oppimisen kulttuuri opettajien ja oppilaiden yhteisöön (Greenberg, 2000). Ongelmaksi voi kuitenkin muodostua vaikeus tiettyyn tilanteeseen liittyvien taitojen yleistymisestä muiden tilanteiden yhteyteen.

Siirtovaikutus tehtävän sisällä ja yleistäminen muihin tilanteisiin

Ashman ja Conway (1989) tekevät käsitteellisen eron tehtävän sisäisen siirtovaikutuksen ja yleistämisen välille. Tehtävän sisäisellä siirtovaikutuksella he tarkoittavat uuden tiedon tai taidon omaksumista tietyn tehtävätilanteen sisällä. Oppiminen ta-

pahtuu runsaiden toistojen, opettajan suoritettaman mallittamisen, vertaisryhmässä tapahtuvan vuorovaikutuksen ja oppilaan itsenäisen toiminnan ja omin sanoin tapahtuvan toiminnan kuvaamisen avulla. Oppimansa asian lapsi kykenee soveltamaan toiseen samanlaiseen tehtävätilanteeseen.

Yleistämisellä Ashman ja Conway (1989) tarkoittavat tehtävätilanteessa harjoittelun ja opittavaan asiaan liittyvän ilmiön tai sitä ohjaavan periaatteen itsenäistä käyttämistä ja soveltamista uusissa, tehtävän ulkopuolisissa tilanteissa. Heidän mukaansa lasten, joilla on heikot oppimisvalmiudet, on vaikeaa yleistää tietystä tilanteesta opittuja taitoja muihin tilanteisiin (myös Campione, 1987). Tehokkaana yleistämis- ja soveltamistaitojen kehittämisen menetelmänä pidetään siltaamista (Haywood ym., 1992) eli viittaamista samanlaisen ilmiön esiintymiseen toisissa erilaisissa tilanteissa tai periaatteiden ja strategioiden soveltamista useisiin erilaisiin tilanteisiin.

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelmassa edellä kuvattuja oppimisvalmiuksien kehittämistä edistäviä periaatteita sovelletaan matemaattisten sisältöjen oppimiseen. Seuraavassa tarkastellaan lähemmin ohjelman matemaattisia sisältöjä ja niiden yhteyttä lasten varhaisten matemaattisten taitojen kehittämiseen.

VARHAISTEN MATEMAATTISTEN OPPIMISVALMIUKSIEN TEOREETTINEN TAUSTA

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelmassa lukuihin ja lukumääriin liittyvien tietojen ja taitojen kehittämistä tuetaan lapsen lähikehityksen vyöhykkeellä välittävän ohjauksen avul-

la yhdessä metakognitiivisten tietojen ja taitojen kehittämisen kanssa. Tällöin lasta ohjataan numeeriseen toimintaan liittyvien kognitiivisten prosessien tarkastelemiseen ja ohjaamiseen. Tavoitteena on, että lapsi oppii itsenäisesti vastaanottamaan ja käsittelemään ympäristössä esiintyvää lukuihin ja lukumääriin liittyvää tietoa (Hannula, Mattinen & Lehtinen, 2005). Tällöin vertailuun, luokitteluun, suhdekäsitteisiin, lukuihin ja laskemiseen liittyvät käsitteet tarjoavat lapselle välineet harjoitella ongelmanratkaisua, tulevien tapahtumien ennakkointia ja itsenäistä toiminnanohjausta.

Kognitiivisten taitojen kehittämistä tukeva pienten lasten matemaattinen kehittämisohjelma etenee kahden vaiheen kautta. Ensimmäisessä vaiheessa lapsia autetaan luomaan tietoinen perusta numeeristen tietojen ja taitojen kehittämiseksi. Ohjelman avulla halutaan varmistaa, että ne lapset, joilla on vähän kokemuksia lukumäärien havainnoinnista ja/tai joita ei ole ohjattu lukumääriin liittyvän tiedon käsittelemiseen, saisivat runsaasti välittäviä oppimiskokemuksia (Mattinen, 2006). Toisessa vaiheessa lapsia ohjataan harjoittelemaan ja ymmärtämään lukusanojen avulla tapahtuvaa laskemista. Tällöin harjoittelu ei kohdistu pelkästään esimerkiksi esinejoukon lukumäärän laskemiseen, vaan laskemisen avulla ongelmanratkaisu otetaan yhteisen kiinnostuksen ja tutkimisen kohteeksi.

Varhaisten matemaattisten valmiuksien rakentaminen tietoiseksi Kehittämisohjelman ensimmäisessä vaiheessa luodaan perusta lukumääriin ja lukuihin liittyvän tiedon käsittelemiselle ja suunnataan lasten huomio pieniin lukumääriin ja määrällisiin muutoksiin. Tavoitteena on lukumäärien suuruuksiin liittyvän ei-kielellisen ja epätarkan tiedon

käsitteellistäminen¹. Pienten lasten varhaiset tiedostamattomat kyvyt yksilöidä ja tunnistaa pienistä lukumääristä muodostuvia joukkoja, erottaa suurempia lukumääräjoukkoja ja reagoida lukumäärissä tapahtuviin muutoksiin tarjoavat lähtökohdan lukumääriin liittyvän tiedon ja taidon rakentamiselle tietoiselle tasolle.

Kehittämisohjelman ensimmäisessä vaiheessa lasta autetaan suuntaamaan huomionsa määrällisiin piirteisiin ja tarkkoihin pieniin lukumääriin (Hannula & Lehtinen, 2001, 2005; Hannula, Mattinen & Lehtinen, 2005) ja muodostamaan mielen sisäinen malli eli representaatio pienistä tarkoista lukumääristä (Wynn, 1992a) ja suurempien epätarkkojen lukumäärien välisistä suhteista (Xu & Spelke, 2000). Lisäksi lasta ohjataan esineiden koon ja esinejoukkojen lukumäärien välisten suhteiden tarkastelemiseen ja vertaamiseen (Resnick & Greeno, 1990) sekä tarkkoihin pieniin lukumääriin että epätarkkoihin suurempiin lukumääriin ja määriin kohdistuvien muutosten – lisäämisen ja vähentämisen seurauksien – tarkastelemiseen ja vertaamiseen (Resnick & Greeno, 1990; Wynn, 1992a). Lasta ohjataan myös noudattamaan ja tunnistamaan yksi yhteen -vastaavuuden ja järjestyksen periaatteet (Gelman & Gallistel, 1978). Yksi yhteen -vastaavuuden muodostamista ei liitetä vielä kielellisen laskemisen yhteyteen, vaan se kohdistuu esineiden asettamiseen yksi yhteen -vastaavuuteen toisten esineiden tai ihmisten kanssa. Myös lukujen luetteleminen tapahtuu ainoastaan lukujen luettelemistilanteissa (Fuson, 1988), joihin ei vielä liity esinejoukon lukumäärän määrittämistä laskemalla.

Pienten tarkkojen lukumäärien tarkastelussa käytetään yhden, kahden ja kolmen elementin muodostamia joukkoja, joita lasten on mahdollista tunnistaa havaitsemalla. Pienten tarkkojen esinejoukkojen lukumäärien tunnistaminen edellyttää kuitenkin, että lapsi tietoisesti kiinnittää huomiota esinejoukon lukumäärään. (Hannula & Lehtinen, 2001; 2005.) Kehittämisohjelmassa lapsia ohjataan kiinnittämään huomiota ympäristössä esiintyvien pieniä lukumääriä sisältävien esinejoukkojen tai tapahtumasarjojen tarkkoihin lukumääriin sekä näissä lukumäärissä tapahtuviin muutoksiin (Hannula & Lehtinen, 2001; 2005; Hannula, 2005). Lukumäärien havaitsemisen, tunnistamisen ja käsittelemisen tueksi lasta autetaan muodostamaan pieniä lukumääriä vastaaville lukusanoille kardinaalimerkityksiä (Fuson, 1988), mikä tarkoittaa ymmärrystä tietyn lukusanan sisältämästä tarkasta lukumäärästä.

Lukusanojen määrällisen merkityksen hankkimista tuetaan ja kielellistä ilmaisua täydennetään näyttämällä havainnon kohteena olevan esinejoukon yksittäisten elementtien lukumääriä pystyyn nostettujen sormien avulla (Wiese, 2003). Ymmärrettyään lukusanan yksi merkityksen lapselta vie runsaasti aikaa oppia lukusanan kaksi määrällinen merkitys. Tällöin yksi tarkoittaa ”yksittäistä yhtä” ja kaksi tarkoittaa ”joukkoa, joka koostuu yhdestä ja toisesta yhdestä”. Lukusanat kolmesta eteenpäin tarkoittavat ”kaikkia muita joukkoja, mutta ei yhden ja kahden elementin joukkoja”. Lukusanan kaksi oppiminen on vaikeaa, koska se edellyttää lukusanan kaksi sisältämän käsitteen ”yksiköistä muodostuva joukko” ymmärtämistä (Spelke,

1 Erottelimme tässä lukumäärien representaatiot kahteen: epätarkkaan, ei-kielelliseen lukumäärien suuruusluokkiin liittyvään havaitsemiseen ja tarkkaan, kielellis-käsitteelliseen lukusanoilla kuvattavissa olevaan prosessointiin.

2003). Opittuaan lukusanan kaksi määrällisen merkityksen lapsi tarvitsee vielä aikaa oppiakseen lukusanan kolme määrällisen merkityksen. Tällöin lukusana kolme tarkoittaa ”joukkoa, joka koostuu yhdestä ja toisesta yhdestä ja vielä yhdestä yhdestä”.

Lähes samaan aikaan, kun lapsi on oppinut kardinaalimerkityksen lukusanalle kolme, hän on oppimassa myös kardinaalisuuden periaatteen, joka tarkoittaa, että hän on muodostanut yleisen säännön siitä, miten kielellisen laskemisen, yksi yhteen -vastaavuuden ja järjestyksen periaatteiden pohjalta voi selvittää joukon jäsenten lukumäärän (Wynn, 1992b). Kehittämishjelman ensimmäisessä vaiheessa halutaan varmistaa, että lapsi hankkii määrällisen sisällön lukusanoille yksi, kaksi ja kolme, jolloin lapsella on perusta toisessa vaiheessa tapahtuvalle laskemisen harjoittelukselle.

Oppimisvalmiuksien kehittämishjelman ensimmäisessä vaiheessa ei kohdisteta vielä huomiota laskemisrutiinien harjoitteluun. Vaihe sisältää esineiden ja asioiden suuruussuhteiden tarkastelemista ja vertaamista. Muina varhaisten oppimisvalmiuksien kehittämishjelman ensimmäisen vaiheen matemaattisina sisältöinä ovat pienet tarkat lukumäärät 1–3 ja niitä vastaavat lukusanat sekä suuret ei-laskettavat lukumäärät ja määrät. Vaihe sisältää sekä pienten tarkkojen että suurten epätarkkojen lukumäärien lisäämistä, vähentämistä, vertaamista ja lukumäärien välisten suhteiden ja yksi yhteen -vastaavuuden tarkastelua, lukusanojen luettelua ja asioiden luokitteluun ja luokkien lukumäärien vertaamista.

Kielellisten laskemistaitojen hankkiminen

Kehittämishjelman toisessa vaiheessa kohdistetaan huomio lapsen kielellisiin laskemistaitoihin. Lasta ohjataan määrittä-

mään esineiden ja tapahtumien lukumääriä laskemisen avulla (Gelman & Gallistel, 1978). Yksi yhteen -vastaavuuden periaate tarkoittaa, että laskettaessa yhtä esinettä osoitetaan vain kerran ja jokaiseen esineeseen liitetään ainoastaan yksi järjestyksessä seuraava lukusana. Järjestyksen periaate tarkoittaa, että lukusanat luetaan tietysti, määrättyssä järjestyksessä. Kardinaalisuuden periaate tarkoittaa, että viimeisen laskettavan esineen kohdalla ilmoitettu lukusanan ilmoittaa koko laskettavan joukon lukuisuuden. Abstraktisuuden periaate tarkoittaa, että laskettavan joukon ei tarvitse välttämättä sisältää fyysisiä esineitä tai ihmisiä vaan laskeminen voidaan kohdistaa myös esimerkiksi äänimerkkeihin tai liikesarjoihin. Laskemisjärjestyksestä riippumattomuuden periaate puolestaan tarkoittaa, että tulokseen ei vaikuta, missä järjestyksessä esineet lasketaan. Lopputulos on sama vaikka esinejoukon laskemisen aloitettaisiin vasemmalta tai oikealta.

Matemaattisen kehittämishjelman toisessa vaiheessa lapselle tarjotaan runsaasti mahdollisuuksia laskemisen periaatteita noudattavan kielellisen laskemisen harjoitteluun ja laskemisen merkityksen ymmärtämiseen erilaisten leikkien ja ongelmanratkaisutilanteiden yhteydessä. Laskettavana on sekä konkreettisia esineitä että perättäin esitettyjä äänimerkkejä. Lapsen laskemistaitojen ohjaamisessa kiinnitetään huomiota siihen, että lapsi oppii huolellisesti ja riittävän tarkasti sana-esine-vastaavuuden sääntöä noudattaen osoittamaan jokaista laskettavaa esinettä ja luettelemaan lukusanat oikeassa järjestyksessä osoitusten tahdissa (Briards & Siegler, 1984).

Siirtyminen kielellisen laskemisen piiriin on lapselle vaativa tehtävä, sillä se sisältää käsitteellisen muutoksen luvun mielen sisäisessä mallissa, jonka lapsi on itselleen muodostanut. Tässä käsitteellisen

muutoksen vaiheessa lapsi joutuu määrällisen representaation pohjalta muodostamaan uuden representaation, johon sisältyy myös kielellinen laskemissysteemi. Kielellinen, laskemisen periaatteita noudattava laskeminen tarjoaa lapselle mahdollisuuden määrittää tarkasti lukumääriä, jotka ylittävät lukualueen, jonka lapsi voi havaita (Wynn, 1992a). Kehittämissohjelman ensimmäisessä vaiheessa on huomioitu tämä siirtymävaihe ja pyritty luomaan perusta, joka helpottaa laskemissysteemiin siirtymistä.

Laskemistaitojen harjoittelu kohdistuu toisen vaiheen alussa suhteellisen pienelle lukualueelle, mutta se ylittää kuitenkin lapsen pienten lukumäärien tunnistamisalueen. Tällöin lapsen on mahdollista harjoitella laskemista pienten tarkkojen lukumäärien lisäksi lukumäärillä, jotka ylittävät ainoastaan yhden tai kahden yksikön verran varhaisen lukumäärien tunnistamisalueen. Fusonin (1988) mukaan lapset käyttävät lukusanoja erilaisissa merkityksissä, ennen kuin oppivat kardinaalisuuden periaatteen mukaisen laskemisen. Lapset käyttävät lukusanoja ilmaisemaan joukon kokonaismäärää (esimerkiksi havaitsemalla tunnistettuja pieniä lukumääriä). He myös luettelevat lukusanoja loruina, joilla ei ole määrällistä sisältöä. Lisäksi he käyttävät lukusanoja laskemissanoina, jolloin heidän alkeelliset laskemiserutiininsa ovat lähinnä imitoivaa toimintaa. Kehittämissohjelman toisen vaiheen tavoitteena on auttaa lasta yhdistämään nämä eri konteksteissa esiintyneet lukusanojen merkitykset kardinaalisuuden periaatetta noudattavien laskemistaitojen yhteyteen.

Kehittämissohjelman toisessa vaiheessa lapset harjoittelevat ongelmanratkaisua, jossa tarvitaan laskemista, sekä näihin ongelmaratkaisutilanteisiin liittyvää itsestä toiminnanohjausta. Ongelmien ratkaiseminen tapahtuu lukumäärien ja luku-

jen luokittelun ja vertaamisen avulla sekä lukumäärien hajottamisen ja kokoamisen avulla (Resnick & Greeno, 1990). Ongelmanratkaisun apuna käytetään konkreettisia materiaaleja ja lukumäärien näyttämistä sormien avulla. Laskemistaitojen harjoittamisen yhteyteen liitetään myös pohdintoja lukumäärän säilyvyydestä (Piaget, 1961). Tällöin lasta ohjataan kiinnittämään huomiota siihen, että esinejoukon lukumäärä ei muutu esineiden sijainteja muuttamalla, jos siihen ei lisätä uusia eikä vanhoja oteta pois.

Toisen vaiheen aikana luodaan pohjaa myös kahden joukon vertaamiselle (Nunes & Bryant, 1996). Lasta ohjataan kiinnittämään huomiota tarvittavaan lukumäärään ja määrittämään se tarkasti, jolloin vastaavan lukumäärän tuottaminen laskemalla on mahdollista. Lisäksi luodaan pohjaa myös määrällisen sisällön omaaville lukujonotaidoille (English & Halford, 1996; Kinnunen, Lehtinen & Vauras, 1994). Autettaessa lasta muodostamaan perustaa lukujonotaidoille pyritään monin eri tavoin tuomaan esille lukujen ja lukumäärien välinen vastaavuus ja niiden yhteys lukujonoon. Lasten kanssa tarkastellaan, mitä vaikutuksia lukujonossa eteenpäin ja taaksepäin askeleittain liikkumisella on lukumäärään kymmentä pienemmällä lukualueella.

Pohjaa lukujonotaidoille ja mentaalisen lukusuoran (Case, 1996) muodostumiselle luodaan myös lukumäärän nopean arvioinnin ja laskemalla tapahtuvan tarkistamisen avulla. Lasten kanssa harjoitellaan lukumäärän arvioimista myös sen jälkeen kun näkyvässä olevasta ja piiloon laitetusta lukumäärästä on otettu jotakin pois tai siihen on lisätty jotakin (Zur & Gelman, 2004).

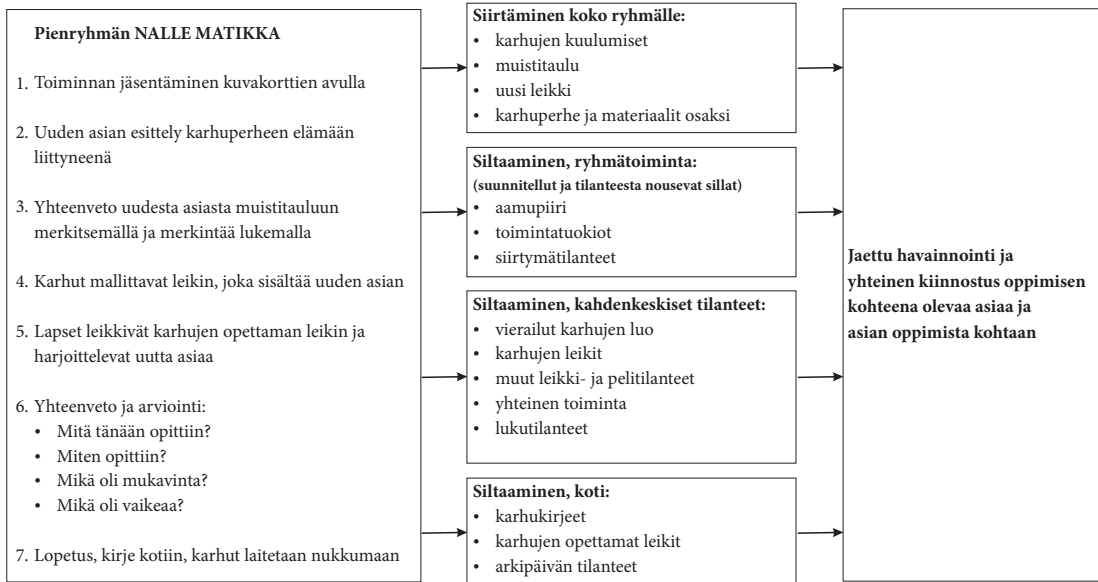
TEOREETTISEN TAUSTAN SIIRTÄMINEN KÄYTÄNNÖN TOIMINTAMALLIKSI

Toimintamallin (kuvio 1) rakentuminen lähtee liikkeelle kerran viikossa tapahtuvasta pienryhmätoiminnasta. Pienryhmän Nallematikka toteutetaan välittävän ohjauksen periaatteiden mukaisesti. Pienryhmätoiminnan eteneminen toisiaan seuraavien vaiheiden kautta auttaa lapsia omaksumaan uuden asian tehtävätilanteen sisällä. Tähän tehtävätilanteen sisällä tapahtuvaan oppimiseen pyritään pohtimalla karhujen asiaa tai ongelmaa monesta eri näkökulmasta ja tiivistämällä karhuilta opittu asia kuvan muotoon. Uusi asia tuodaan esille karhujen mallittamassa leikissä. Tämän jälkeen lapset hankkivat omakoh- taisia kokemuksia uudesta asiasta leikki- mällä karhujen opettamaa leikkiä. Leikki- tilanteessa tapahtuvan vuorovaikutuksen

nähdään tukevan lapsen oppimisvalmiuk- sien kehittymistä.

Pienryhmätoiminnan eri vaiheita jä- sennetään lapsille kuvakorttisarjan avulla. Kuvakorttien avulla lapsia ohjataan myös palauttamaan mieleensä aikaisemmillä kerroilla harjoiteltuja asioita. Lapsia au- tetaan myös pienryhmän ulkopuolisissa tilanteissa jäsentämään ympäristön ärsyk- keitä ja ennakoimaan tulevia tapahtumia pienryhmässä hankittujen kokemusten pohjalta.

Pienryhmässä käsitellyt matemaatti- set sisällöt otetaan koko päiväkotiryhmän lasten ja aikuisten jaetun havainnoinnin ja yhteisen kiinnostuksen ja tutkimisen koh- teeksi. Tällä tavoin pienryhmässä harjoitel- lut ja opitut asiat sillataan tehtävätilanteen ulkopuolelle. Korostetusti lapsia houku- tellaan rakentamaan siltoja pienryhmässä harjoitellun asian ja muissa tilanteissa il- menevien samanlaisten asioiden ja ilmi-



Kuvio 1. Käytännön malli Nallematikan toteuttamisesta

öiden välille. Ohjelmassa ohjataan aikuisia kiinnittämään huomiota päivittäisten kahdenkeskisten kohtaamisten tarjoamiin mahdollisuuksiin. Esimerkiksi ruokailuun, lukemiseen, pelaamiseen, askarteluun ja pukemiseen liittyvissä tilanteissa on usein tunnistettavissa yhtäläisyyksiä Nallematikassa käsiteltyihin asioihin. Lapsia houkutellaan kiinnittämään huomiota nalleilta opitun asian ja yhteisessä toiminnassa esiintyvien samankaltaisten ilmiöiden välille. Opittujen asioiden yleistymistä varmistetaan myös sillä, että pienryhmätoimintaan osallistuneiden lasten vanhemmille lähetetään jokaisen pienryhmäkerran jälkeen ohjelmaan kuuluva kirje, jossa kerrotaan oppimisen kohteena olleesta asiasta ja kuvataan leikkejä ja arkipäivän tilanteita, joiden yhteydessä kyseiseen asiaan voi kiinnittää huomiota myös kotona.

Lasten oppimistaitojen ja metakognitiivisten taitojen kehittymistä tuetaan tarkastelemalla karhujen ongelmanratkaisua ja neuvomalla karhuja heidän kohtaamisissaan ongelmissa. Pohtiessaan karhujen ongelmanratkaisua, lapset tulevat tietoisiksi myös omista ja toisten tavoista ajatella. Lapset tulevat tietoisiksi myös kognitiivisen toiminnan vaiheista tarkkailemalla ja keskustelemalla leikkitalanteisiin liittyvästä toiminnasta. Esimerkiksi Kim-leikissä puuttuvaa esinettä ja sen kokoa ei voi päättellä, ellei alussa ole kiinnittänyt huomiota leikissä oleviin esineisiin ja niiden kokoroihin. Selvää on myös, että Pikkukarhu ei voi onnistua hakemaan mehupulloihin yhtä korkkia jokaista pulloa kohden, jos ei ole ensin kiinnittänyt huomiota siihen, kuinka monta mehupulloa on ilman korkkia.

Matemaattisia sisältöjä ja niihin liittyviä uusia käsitteitä ja ilmaisuja harjoitellaan yhteisessä toiminnassa. Lapsia autetaan hankkimaan merkityksiä matemaattisille käsitteille käyttämällä niitä ja tuomalla

esiin niihin liittyvää tietoa Nallematikassa leikittyjen leikkien, erilaisten arkipäivän tilanteiden ja päiväkodin toimintatuokioiden yhteydessä. Käsitteiden oppimista ja muistamista tuetaan myös piirtämällä muistitaulu jokaiseen Nallematikatuokioon sisältyneestä matemaattisesta sisällöstä. Muistitaulu pidetään esillä ja siinä olevaa kuvaa luetaan ahkerasti. Karhuperheen kotia pidetään tiettyssä paikassa ryhmätilassa, jotta lapset voivat aina halutessaan mennä leikkimään karhuilla, ja he voivat myös hakea karhujen varastosta Nallematikkaan liittyvää leikkimateriaalia, jolla he voivat leikkiä toisten lasten kanssa.

Esimerkki esinejoukon laskemisen ottamisesta jaetun havainnoinnin kohteeksi

Erään lastentarhanopettajan kertomus päiväkodin retkellä syntyneestä tilanteesta kuvaa hyvin sitä, miten pienryhmässä käsitellyt asiat voidaan yhdistää arkipäivän tilanteisiin. Retkellä lasten huomio oli kohdistunut vedessä uiskentelemaan sorsaperheeseen. Ottaessaan sorsien lukumäärän selvittämisen jaetun havainnoinnin kohteeksi lapset harjoittelivat mekaanisen yksi yhteen -vastaavuuden sääntöä noudattavan laskemisen lisäksi myös laskemiseen liittyviä metakognitiivisia taitoja.

”Me oltiin tuolla noin luontopolulla kävelemässä ja meren rantaan mentiin ja siellä oli emo – tuollainen äitilintu – ja sillä oli poikasia siellä perässä. Ja lapset: ’Kato ihana pikkanen tuolla ja...’ Ja mä, että montako niitä poikasta on? ...Ja lapset sanoi, että on kuus ja on seitsemän. Ja ihan oikeasti, me ihan kauan katottiin ja laskettiin niitä ja se oli ihanan herkullinen hetki, – että, eiks oo vaikea niitä laskea, että, miten se nyt onkin niin vaikeaa. Ja lapset, että kun ne koko ajan vaihtaa paikkaa ja ne on niin samannäköisiä. Ja mä, että niinpäs onkin ja miten me saatais ne hyvin laskettua.

'Jos ne uis tossa jonossa kaikki, niin se olis helpompi laskea.' Ja sitten kun ne meni lähemmäs rantaa, niin joku lapsista sanoi: 'Ja jos ne nyt nousis tonne rantaan, niin meidän olis helpompi, kun siinä ne ei vaihda paikkaa.' Sitä kesti vaikka kuinka kauan ja nää linnut oli siinä ja sitä matikkaa väännettiin ja käännettiin siinä - - se oli kyllä niin herkullinen hetki."

Kirjoittajatiedot

Aino Mattinen, KT, ja Pekka Räsänen, PsL, toimivat tutkijoina Niilo Mäki Instituutissa. Minna M. Hannula, KT, toimii erikoistutkijana ja Erno Lehtinen, KT, professorina Turun yliopistossa.

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelman julkaiseminen

Varsinainen varhaisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelmaan liittyvä vuoden mittainen vaikuttavuustutkimus on juuri alkamassa. Tutkimus toteutetaan Niilo Mäki Instituutin ja Turun yliopiston yhteistyönä syksyn 2008 ja kevään 2009 aikana. Tutkimuksessa selvitetään oppimisvalmiuksien kehittymistä lasten matemaattisten ja kielellisten taitojen eri osa-alueilla, tarkkaavaisuudessa, muistissa sekä hienomotorisissa taidoissa. Tämän kokeiluvaiheen aikana kartoitetaan myös päiväkodin henkilökunnan ja lasten vanhempien kokemuksia Nallematikan käytöstä. Näiden pohjalta ohjelmaan tehdään tarvittavia muutoksia ja tarkennuksia.

Nallematikka julkaistaan tutkimuksen toteuttamisen jälkeen. Ohjelma tullaan julkaisemaan sekä kokonaisuudessaan oheismateriaalin kera että vapaasti käytettäväksi tietoverkkovälitteisesti ilman konkreettista materiaalia.

Työtämme motivoi se, että ensimmäisissä kokeiluissamme lasten, päiväkotien henkilökuntien sekä lasten vanhempien kokemukset ja palautteet varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelmasta ovat olleet erittäin myönteisiä ja kannustavia, ja esikokeiden tulokset lasten kognitiivisista taitojen kehityksestä positiivisia. Esikokeiden tulokset tullaan julkaisemaan seuraavassa Nallematikka-artikkelissa.

LÄHTEET

- Ashman, A.F. & Conway, R.N.F. (1989). Cognitive strategies for special education: Process-based instruction. London: Routledge.
- De Bono, E. (1991). The CoRT Thinking Program. Teoksessa A.L. Costa (toim.), Developing Minds. Programs for teaching thinking, 27–32. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Briards, D. & Siegler, R.S. (1984). A featural analysis

- of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20 (4), 607–618.
- Campione, J.C. (1987). Metacognitive Components of Instructional Research with Problem Learners. Teoksessa F.E. Weinert & R.H. Kluwe (toim.), *Metacognition, Motivation and Understanding*, 117–142. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Case, R. (1996). Reconceptualizing the nature of children's conceptual structures and their development in middle childhood.

- Teoksessa R. Case & Y. Okamoto (toim.), The role of central conceptual structures in the development of children's thought, 1–26. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 61 (1–2), Serial No. 246.
- English, L.D. & Halford, G.S. (1995). *Mathematics education. Models and Processes*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Feuerstein, R., Rand Y., Hoffman, M.B. & Miller, R. (1980). *Instrumental enrichment. An intervention program for cognitive modifiability*. Baltimore: University Park Press.
- Flavell, J.H. (1987). *Speculations About the Nature and Development of Metacognition*. Teoksessa F.E. Weinert & R.H. Kluwe (toim.), *Metacognition, Motivation and Understanding*, 21–29. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fuson, K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.
- Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Greenberg, K. (2000). Attending to hidden needs: The Cognitive Enrichment Advantage Perspective. *Educational & Child Psychology Special Issue: Psychological influences upon education intervention*. 17 (3), 51–69
- Guiford, J.P. (1977). *Way beyond the IQ: Guide to improving intelligence and creativity*. Great Neck, New York: Creative Synergetic Associates.
- Hannula, M.M. (2005). Spontaneous focusing on numerosity in the development of early mathematical skills. *Annales Universitatis Turkuensis. Serie B*, 282. Turku: Painosalama.
- Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (2001). Spontaneous tendency to focus on numerosities in the development of cardinality. Teoksessa M. Panhuizen-Van Heuvel (toim.), *Proceedings of 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 3, Drukkerij Wilco, The Netherlands: Amersfoort, 113–120.
- Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills in young children. *Learning and Instruction*, 15, 237–256.
- Hannula, M.M., Mattinen A. & Lehtinen E. (2005). Does social interaction influence 3-year-old children's tendency to focus on numerosity? A quasi-experimental study in day-care. Teoksessa L. Verschaffel, E. De. Corte & M. Valcke (toim.), *Designing powerful learning environments to promote deep conceptual and strategic learning in major curricular domains*, 63–80. *Studia Paedagogica*. Leuven University Press.
- Haywood, H.C., Brooks, P.H., & Burns, M.S. (1992). *Bright Start: Cognitive Curriculum for Young Children*. Watertown, MA: Charlesbridge Publishing.
- Heiman, M. (1991) *Learning to learn*. Teoksessa A.L. Costa (toim.), *Developing Minds. Programs for teaching thinking*, 51–53. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. (1994). *Matemaattisen taidon arviointi esikoulussa ja koulun 1. luokalla*. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta & P. Niemi (toim.), *Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla*. Turun yliopisto, *Oppimistutkimuksen keskuksen julkaisuja* 3, 55–76.
- Lipman, M. (1991). *Philosophy for children*. Teoksessa A.L. Costa (toim.), *Developing Minds. Programs for teaching thinking*. 35–38. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Mattinen, A. (2006). *Huomio lukumääriin. Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemista päiväkodissa*. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C, 247.
- Meeker, M.N. (1991). *Structure of Intellect (SOI)*. Teoksessa A.L. Costa (toim.), *Developing Minds. Programs for teaching thinking*, 3–8. Alexandria, VA: Association for Supervision

- and Curriculum Development.
- Nunes, T. & Bryant, P. (1996). Children doing mathematics. Oxford, UK: Blackwell.
- Piaget, J. (1961). The child's conception of number. Kääntänyt C. Gattegno & F.M. Hodgson. Toinen painos. Alkuperäisjulkaisu 1941. London: Routledge & Kegan Paul.
- Resnick, L.B. & Greeno, J.G. (Julkaisematon käsikirjoitus). Conceptual growth of number and quantity. 114 sivua.
- Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context. New York: Oxford University Press.
- Ruff, H. & Rothbart, M. (1996). Attention in early development. Themes and Variations. New York: Oxford University Press.
- Spelke, E. (2003). What makes us smart? Core knowledge and natural language. Teoksessa D. Gentner & S. Golding-Meadow (toim.), Language in mind, 277–311. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Vygotsky, L.S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wiese, H. (2003). Numbers, Language, and the Human Mind. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wright, E.D. (1991). Odyssey: A curriculum for thinking. Teoksessa A.L. Costa (toim.), Developing Minds. Programs for teaching thinking, 48–50. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Wynn, K. (1992a). Evidence against empiricist accounts of the origins of numerical knowledge. *Mind & Language* 7 (4), 315–332.
- Wynn, K. (1992b). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220–251.
- Wynn, K. (1997). Competence models of numerical development. *Cognitive Development*, 12, 333–339.
- Xu, F. & Spelke, E. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 74, 1–11.
- Zur, O. & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19,