

Pekka Räsänen
Tuire Koponen

Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologisesta tutkimuksesta

Tässä katsauksessa luodaan silmäys matemaattisten oppimisvaikeuksien eli dyskalkulian neuropsykologiseen tutkimukseen Niilo Mäki -instituutissa. NMI:n tutkimus paljastuu suoraksi jatkumoksi dyskalkulian tutkimuksen satavuotista historiaa. Vaikka tutkimuksen menetelmät ja ilmiöitä kuvaavat käsitteet ovatkin muuttuneet, tutkimuksen ydinkysymykset ovat säilyneet lähes muuttumattomina. Tutkimuksen keinoin yritetään ymmärtää, miten kokemus määrästä syntyy, ja sitä, miten määrä ja sitä kuvaamaan kehitetyt symbolit, numerot, saavat merkityksensä. Oppimisvaikeustutkimuksessa pyritään selvittämään sitä, miksi toisille määrän kokemus avautuu helpommin, ja miksi numeroiden muodostaman lukusarjan oppiminen osoittautuu joillekin ennalta arvaamattoman työlääksi. Näiden ydinkysymysten päälle rakentuu monimuotoinen tutkimusmaailma monesti yllättävine löytöineen. Samoista kysymyksistä voidaan löytää myös suuntaviivat sille, mihin NMI:ssa tehtävä dyskalkuliatutkimus on menossa.

Asiasanat: neuropsykologia, dyskalkulia, matemaattiset oppimisvaikeudet

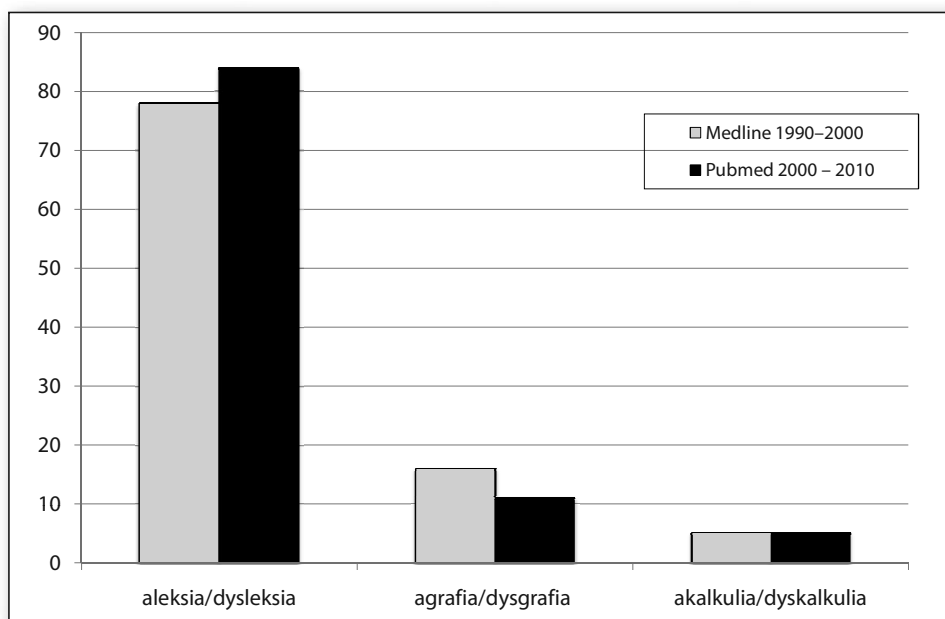
Oppimisvaikeuksien tutkimus on lisääntynyt merkittävästi kahden viime vuosikymmenen aikana. Tutkimuksen lisääntymistä ovat siivittäneet sekä yleisemmin tutkimusresurssien kasvu että toisaalta uusien tutkimusmenetelmien ja -laitteistojen kehittyminen. Eri oppimisvaikeuksien neuropsykologisten tutkimusten määriä 1990-luvulla selvittäneet Ardila ja Roselli (2002) tekivät haut Medline-tutkimustietokannasta avainsanoilla aleksia/dysleksia (lukeminen), agrafia/dysgrafia (kirjoittaminen) ja akalkulia/dyskalkulia (laskeminen). He löysivät yhteensä 1 632 näitä teemoja käsittelevää artikkelia. Me teimme vastaavan haun kuluvalta vuosikymmeneltä (vuosi 2000 – kevät 2010) käyttäen Pubmed-tietokantaa¹. Tutkimusten määrä 1990-luvulta 2000-luvulle oli lähes kaksinkertaistunut (yht. 3 243 viitettä).

Vaikka matemaattisia vaikeuksia koskevien neuropsykologisten tutkimusten määrä oli kaksinkertaistunut vuosikymmenessä, niin suhteessa muihin oppimisvaikeuksia käsitelleisiin tutkimuksiin ei määrässä ollut tapahtunut muutosta (kuvio 1). Jokaista matemaattisia oppimisvaikeuksia käsittelevää tutkimusta kohden ilmestyy edelleen noin kaksi kirjoittamisen ja kak-

¹ Pubmed-tietokannan keskeisenä juurena on vanhempi Medline-tietokanta, joten hakuja voidaan pitää kohtuullisen yhteismittaisina.

sikymmentä lukemisen vaikeuksia käsittelevää tutkimusta. Näin siitäkin huolimatta, että on vahvasti osoitettu, että lukemisen ja laskemisen oppimisvaikeudet ovat yhtä

yleisiä, ja toisaalta laskutaidottomuus on kulttuurissamme vaikutuksiltaan lukutaidottomuuteen rinnastettavissa oleva pulma.



Kuvio 1. *Oppimisvaikeuksien neuropsykologisten tutkimusten prosenttiosuudet aihepiireittäin (lukeminen, kirjoittaminen, laskeminen) ajanjaksolla 1990–2000 (Ardila & Roselli, 2002) sekä 2000–2010.*

Vaikka matemaattisia oppimisvaikeuksia käsittelevien neuropsykologisten tutkimuksen määrä on ollut vähäinen verrattuna muihin oppimisvaikeuksiin, on ymmärtämyksemme näistä vaikeuksista lisääntynyt merkittävästi. Kaksikymmentä viime vuotta ovat tuoneet dyskalkulian tutkimukseen merkittäviä läpimurtoja: on alettu ymmärtää vaikeuksien mekanismeja ja taustatekijöitä. Tällä kehityksellä on kuitenkin selkeät juurensa tämän tutkimusalan satavuotisessa historiassa.

NYKYTUTKIMUKSEN HISTORIALLISTA TAUSTAA

Frenologian isänä tunnettu Franz Joseph Gall (1758–1828) esitti, että aivojen toiminnallinen rakenne koostuu 27:stä toisistaan riippumattomastaprosessointikeskuksesta.

Yksi näistä keskuksista oli ”lukujen ja matematiikan lähde”, joka sijaitsi otsan sivustalla hieman silmän yläpuolella. Hänen ja muiden frenologien tutkimukset perustuvat pääkallon kohoumien ja kuoppien sekä yksilöiden taitojen välisten yhteyksien etsimiseen. Nykytutkimuksen valossa nämä analyysit ovat lähinnä osa neurotieteen surkuhupaisaa historiaa ”hyväntahtoisuus- ja lihansyöjävaistokeskuksineen”. Kuitenkin ajatus siitä, että erilaisia aivotoimintoja voitaisiin paikantaa, ei kuollut frenologian mukana, vaan päinvastoin, se herätti kasvavaa kiinnostusta aivojen tutkimukseen myös matemaattisten ajatusten olinpaikana. Paikka oli vain vielä epäselvä.

Varhaisimpanatutkimuksena on usein mainittu Lewandowskyn ja Stadelmanin (1908) raportoima kuvaus potilaasta, jolta poistettiin verenpurkauma vasemmasta takaraivolohkosta. Potilas oli 27-vuotias

satamavalvoja, jonka päivittäisiin työrutiineihin kuului paljon laskemista. Operaation jälkeen hänen puheen tuottamisensa ja ymmärryksensä sekä lukeminen olivat säilyneet. Potilas kykeni lukemaan ja kirjoittamaan numeroita ja lukuja, mutta tutkijoiden yllätykseksi yksinkertaisimmitaan laskutoimitukset eivät mieheltä enää sujuneet. Tutkijat päättelivät, että laskuvaikeudet olivat kielellisistä kyvyistä riippumattomia ja johtuivat tässä tapauksessa numeroiden ”optisen mielikuvan häiriöstä, vaikkakaan potilas itse ei sitä myöntänyt”.

Seuraavina vuosina tutkijat (Berger, 1926; Henschen, 1920; Poppelreuter, 1917; Singer & Low, 1933) kuvasivat yksittäisiä tapauksia, joissa matemaattiset taidot olivat aivovaurion vuoksi kadonneet. Sittig (1917) ja Peritz (1918) tarjosivat aivojen ”laskemiskeskukseksi” vasemman aivopuoliskon keskusuurteen takaista aluetta ja erityisesti aluetta, jota kutsutaan angulaariseksi poimuksi. Poppelreuter (1917), vaikkakin päätyi samanlaiseen sijoitteluun, korosti oireiden olevan yksilöllisiä ja riippuvan sekä perintötekijöistä että oppimishistoriasta.

Akalkulia-nimityksen keksinyt Henschen (1926) esitti, että aivokuoresta voitaisiin erottaa useita laskemiseen liittyviä toiminnallisia keskuksia (lukujen lausuminen otsalohkon alueella sekä lukujen lukeminen ja kirjoittaminen angulaarisessa poimussa). Hécaen lisäsi edelliseen päälaenlohkon vaurioihin liittyvät spatiaaliset vaikeudet sekä anarithmetian (”ei-aritmetiikka”) (Hécaen, Angelergues, & Houllier, 1961). Anarithmetialla hän kuvasi vasemman päälaenlohkon vaurioista aiheutuneita vaikeuksia, joihin ei liittynyt muita kognitiivisia ongelmia. Paremmin EEG:n kehittäjänä tunnettu Hans Berger (1926) päätteli, että akalkuliassa olisi erotettava kaksi eri muotoa. Sekundaarisesta akalkuliasta oli kyse silloin, kun ongelmat liittyvät tark-

kaavaisuuden häiriöihin, dementiaan, muistihäiriöihin tai kielellisiin vaikeuksiin, ja primaarisesta akalkuliasta, joihin muun muassa anarithmetia kuuluu, silloin, kun matemaattisia vaikeuksia ei voida selittää muilla aivotoiminnan häiriöillä.

Tšekkiläinen Vladislav Kosc (1974) ja amerikkalainen Natalie Badian (1983) yrittivät soveltaa vanhoja aikuisneuropsykologisia ryhmittelyjä lasten matemaattisiin oppimisvaikeuksiin (ks. tarkemmin Räsänen & Ahonen, 1995; 2002). Badian käytti apunaan Hécaenin luokitusta jaotellessaan laskuvirheiden perusteella lapsia, joilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia. Lähes puolella lapsista oli ennemminkin tarkkaavuuden ja sarjallisen prosessoinnin vaikeuksia – molemmat oireita, joita aikuispotilailla ei ollut kuvattu.

Vanha lokalisaatioon pohjautuva dyskalkulia-tutkimus joutui 1980-luvulla kritiikin kohteeksi myös aikuisneuropsykologiassa. McCloskey kollegoineen (1985) kritisoi lokalisaatio-oppia kahdesta syystä. Toisaalta karkea jako erilaisiin aivoaluepohjaisiin häiriötyyppeihin ei selittänyt edes näissä samoissa tapauksissa havaittujen vaikeuksien kirjoa saatikka lisännyt ymmärrystä siitä, miten laskeminen tapahtui ”terveissä” aivoissa. Kritiikin ydin kohdistui kuitenkin prosessien anatomisen paikantamisen teoreettiseen mahdottomuuteen: koska vielä ei tiedetty, kuinka matemaattinen kognitiivinen järjestelmä toimii, niin ei voitu tietää sitäkään, mitä ollaan paikantamassa.

McCloskey (1992) esitti, että yksi yksittäinen laskusuoritus voidaan jakaa useisiin vaiheisiin: informaation vastaanoton ja tuottamisen käsittelyjärjestelmiin ja laskemisjärjestelmiin (mm. lukujen ymmärtäminen ja laskusuorituksen tekeminen). Kaikki nämä voitiin jakaa vielä pienempiin alaprosesseihin. Tutkijat pyrkivät yksittäistapaustutkimusten avulla osoittamaan, että

eri osaprosessit voivat häiriytyä täysin toisistaan riippumatta ja siten ne myös toimivat toisistaan irrallisina laskusuorituksen rakennuspalasina (McCloskey, Caramazza & Basil, 1985; Sokol ym., 1991). Miten näistä toisistaan irrallisista prosessoinnin palasista voi syntyä kokemus määrästä? Miksi yksi joukko mielletään paljoksi, toinen vähemmäksi?

PALJONKO ON PALJON?

Wertheimer (1912) pohti, että luvun ymmärrys ei voi syntyä vain siitä, että lisätään ykkösiä peräkkäin toisiinsa. Loputon lisääminen ei tuo käsitystä luvun suuruusluokasta. Hänen mielestään kokemus määrästä syntyy vain siitä, että jokin lueteltu luku suhteutetaan samalla asteikolla oleviin tuttuihin kiintopisteisiin. Hänen mielestään tällaisiksi muodostuvat kokemuksen pohjalta erilaiset määrät, kuten yksi, kymmenen tai viisikymmentä. Luvun suuruusluokan ymmärtäminen ei olisi mahdollista ilman tällaista, Wertheimerin termin ”kvasi-spatiaalista” suhdeasteikkoa. Näihin Wertheimerin ja Bergsoninkin (1911) ajatuksiin tukeutuen Guttman (1936) esitti, että laskemisvaikeuksien taustalta olisi löydettävissä perustavanlaatuisen häiriö kyvyssä arvioida lukumääräisyyttä eli suuruusluokkaa.

Izard kollegoineen (Izard, Pica, Spelke & Dehaene, 2008) pohti äskettäin tätä samaa kysymystä jakaen matemaattisen ymmärryksen kehityksen kahteen eri mekanismiin: epätarkkaan ja tarkkaan. Epätarkan suuruusluokan hahmottaminen (lukumääräisyyden taju²⁾ näyttäisi olevan hyvin pitkälti myötäsyttyistä (keskustelusta ks. esim. Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan & Dehaene, 2004; Whalen, Gallistel & Gelman, 1999). Vauvaiästä lähtien sekä ihmiset että eläimet pystyvät erottamaan

havaitsemiaan lukumääriä toisistaan, mutta ainoastaan, mikäli määrät eroavat riittävästi (Feigenson, 2007; Nieder & Miller, 2003; Ruusuvirta, Huotilainen, Fellman & Naatanen, 2009; Xu & Spelke, 2000). Tämä kyky ei kehittyäkseen näyttäisi edellyttävän koulutusta tai muuta kulttuurista tiedonsiirtoa (Gordon, 2004; Pica, Lemer, Izard & Dehaene, 2004). Koska kyseessä on vain epätarkka kokemus suhteellisista lukumäärien eroista, ei tämä riitä selittämään, miten tietyn tarkan lukumäärän mieltäminen jonkin suuruiseksi kehittyy.

Tarkan lukumäärän määrittämisen kehityksessä Izard kollegoineen (2008) nostaa ratkaisevaksi vaiheeksi kolmen ja neljän ikävuoden välillä kehittyvän oivalluksen luettelemisperiaatteesta. Wertheimerin väheksymä ykkösten lisääminen toinen toisensa jälkeen näyttäisi kuitenkin avaavan oven lukumäärien maailmaan. Toistuvasti on eri tutkimuksissa osoitettu, että pienet lapset voidaan jakaa kahteen ryhmään: niihin, jotka ovat oivaltaneet, että lukumäärän voi selvittää luettelemalla lukuja, ja niihin, jotka turvautuvat havaintopohjaiseen, epätarkkaan arviointiin. Ensimmäiset ovat matemaattisissa tehtävälanteissa ylivertaisia (Sarnecka & Carey, 2008). Jo Piaget (1952) korosti tätä eroa, vaikkakin hänen teoriansa lukumäärän säilyvyydestä onkin kirjoitettu kokonaan uusiksi (esim. Mehler & Bever, 1967; Gelman & Gallistel, 1978).

Luettelemalla saatu tieto määrästä ei ole ainoastaan tarkempi kuin havaintoon perustuva arvio suuruusluokasta, vaan se luo kokonaan uuden tavan lähestyä määrän ongelmaa. Luettelemisperiaatteen ymmärtäminen tarjoaa ihmismielelle käsitteellisen järjestelmän, joka jatkuu tarvittaessa äärettömyyteen saakka.

Näiden kahden erilaisen mekanismin, epätarkan ja tarkan, toisiinsa nivoutumista Dehaene (2009) kutsuu ”mate-

2) *Kykenemme laskemattakin erottamaan, että joukossa ++++++++ on enemmän kuin joukossa * * * * **

maattiseksi intuitioksi”: myötäsyttyinen kyky hahmottaa karkeasti lukumääräisyyttä tarjoaa alustan luettelemisperiaatteen kautta opittavien lukujen suuruusluokan ymmärtämiselle.

KUMPI ON SUUREMPI?

Moyerin ja Landauerin vuonna 1967 julkaisemaa lukujen vertailua käsittelevää tutkimusta pidetään yhtenä matematiikan oppimisen kognitiivisen tutkimuksen alkupisteistä. Heidän tutkimuksessaan selvitettiin, kuinka kauan kestää päättää, kumpi kahdesta esitetystä luvusta on suurempi (esimerkiksi 1 vs. 9 tai 5 vs. 6). Jos päätöksenteko perustuisi luettelemisperiaatteen, olisi nopeampaa ratkaista lähekkäin olevien lukujen (5 vs. 6) suuruusero, koska lähempänä toisiaan olevien lukujen välillä on vähemmän lueteltavaa. Tulos oli päinvastainen: mitä lähempänä luvut ovat toisiaan, sitä kauemmin päätöksenteko kestää. Edellä mainittu matemaattinen intuitio voi selittää heidän havaintonsa.

Numerosymboleihin kiinnittyy matemaattisen intuition kautta kokemus niiden lukumääräisyydestä ja suuruusluokasta: mitä lähempänä luvut ovat toisiaan lukujonossa, sitä samansuuruisemmilta ne tuntuvat. Mitä samankaltaisemmilta kaksi asiaa tuntuu, sitä vaikeampaa on erottaa niitä toisistaan ja sitä kauemmin kestää päättää, miten ne eroavat toisistaan. Luvut 1 ja 9 tuntuvat erisuuruuisemmilta kuin luvut 5 ja 6 keskenään. Tätä kutsutaan ”symboliseksi etäisyysfektiksi”.

Koehenkilöiden reaktioajat näissä lukujen ja lukumäärien vertailututkimuksissa muistuttivat häkellyttävästi tuloksia, joita oli saatu psykofysiologisista mittauksista koon, painon, värisävyjen tai jopa äänenkorkeuksien vertailuissa. Kaikissa näissä erottelukyky näyttäisi noudattavan saman-

kaltaista kaavaa (ns. Weber-Fechnerin laki: erotuskynnys on vakio ja noudattaa eroteltavien piirteiden suhdetta). Matemaattisesti ilmaistuna luvut muodostavat logaritmisesti etenevän jatkumon. Lukujen ja lukumäärien vertailujen reaktioaikatutkimukset ovat herättäneet eloon Ehrenwaldin (1931) ja Krapfin (1937) vanhat ajatukset lukujonon hahmottamisesta tilaan sijoituvana, ordinaalisena matriisina. Nykytermein tätä kutsutaan ”mielensisäiseksi lukujonoksi”, joka näyttäisi tyypillisimmin kulkevan mielenavaruudessa vasemmalta oikealle.

DYSKALKULIAN NEUROPSYKOLOGI- NEN TUTKIMUS NMI:SSÄ

Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologinen tutkimus on Suomessa nuorta. Ensimmäistä kertaa teemaa esiteltiin laajemmin suomen kielellä 15 vuotta sitten Lyytisen, Ahosen ja heidän neuropsykologikollegojensa toimittamassa teoksessa *Oppimisvaikeudet – neuropsykologinen näkökulma* (ks. Räsänen & Ahonen, 1995). Katsauksessa käsiteltiin pääosin edellä mainittuja lokalisaatio-oppeja sekä McCloskeyn ja Dehaenen informaationprosessoinnin näkökulmia diagnostisen käytännön ohjenuorina. Ounasteltiinpa siinä myös tietokoneavusteisten menetelmien tuovan keinoja parempaan diagnostiikkaan, kun samalla valiteltiin sitä, ettei koko maassa ollut vielä minkäänlaisia normitettuja diagnostisia testejä dyskalkulian arviointiin. Kuntoutukselle tai opetukselle ei montaa riviä kyseisestä kirjanluvusta lohjennut.

Normitetuissa diagnostisissa testeissä on päästy siinä määrin eteenpäin, että Kuuskorven ja Keskinen (2008) selvityksen *Psykologisten testien käyttö Suomessa* mukaan viidenkymmenen yleisimmän tes-

tin joukossa oli kaksi NMI:ssä kehitettyä matemaattisten taitojen normitettua arviointimenetelmää. Tietokoneavusteisissa menetelmissäkin on päästy jo hyvään alkuun, sillä NMI:n tutkijan Tuire Koposen psykologia-alan väitöskirjatutkimuksessa *Calculation and language: Diagnostic and intervention studies* (2008) yhtenä keskeisenä välineenä olivat hänen kehittämänsä tietokoneavusteiset matemaattisten taitojen arvioinnin ja harjaannuttamisen tehtävät.

WERTHEIMERIN JA GUTTMANIN JÄLJILLÄ

Vanhat ajatukset nostavat päätään uusien tutkimusmenetelmien kehittyessä. Niilo Mäki Instituutti ja Jyväskylän yliopiston psykologian laitos saivat 2000-luvun puolivälissä EU-rahoitusta aivotoimintojen kuvastamistutkimukseen (osana Euroopan-laajuista tutkijankoulutusohjelmaa Numbra: Numeracy and Brain Development, 2004–07). Tutkimushankkeessa pyrimme analysoimaan magneettikuvausmenetelmin Guttmanin (1936) vanhaa ajatusta siitä, että lukumääräisyyden hahmottaminen voisi olla laskemisen vaikeuksien ytimessä.

Tämä hypoteesi oli saanut uuden muodon modernissa neuropsykologisessa

tutkimuksessa sekä runsain mitoin vahvistusta aikuisaivovauriotutkimuksista ja terveiden aikuisten aivotoimintojen kuvastamistutkimuksista (yhteenvedo, ks. Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003). Nämä aikuisilla tehdyt tutkimukset sekä siihen mennessä pari lapsilla tehtyä aivojen kuorikerroksen rakenneanalyysiä (Isaacs, Edmonds, Lucas & Gadian, 2001; Molko ym., 2003) viittasivat vahvasti siihen, että päälaenlohkon niin sanotuilla intraparietaalialueilla oli keskeisiä lukumääräisyyden käsittelyyn osallistuvia hermoverkkoja (ks. Hécaen, ym., 1961). Näiden aivoalueiden rakenteelliset poikkeavuudet näyttivät johtavan Bergerin kuvaamaan primaariin akalkuliaan. Halusimme selvittää, olisiko tämä lukumääräisyyden käsittelyn häiriö todennettavissa aivotoimintojen tasolla myös tavallisilla koululaisilla, joilla ei ollut todettu neurologisia häiriötä mutta joille matematiikan oppiminen oli ollut koulun alusta alkaen erittäin työlästä – hyvästä erityisopetuksesta huolimatta.

Tutkimuksessamme (Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen & Ansari, 2008) tutkimusärsykkeinä käytettiin lukumääriä esittäviä tauluja, joista koehenkilöiden piti arvioida, kummalla puolella on enemmän neliöitä (ks. kuvio 2). Samanaikaisesti mittasimme toiminnallisella magneettikuvaustamismenetelmällä koehenkilöiden aivo-toiminnoissa tapahtuvia muutoksia.

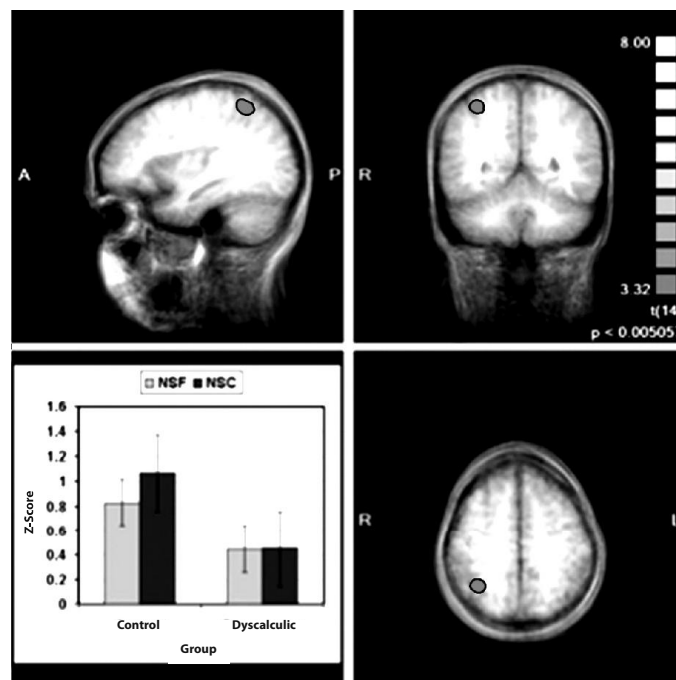


Kuvio 2. *Esimerkki lukumääräisyyden hahmottamisen tehtävästä. Kummalla puolella on enemmän? A) Helppo osio, jossa lukumäärien ero on silmännähtävä. B) Vaikeampi osio, jossa lukumäärät ovat lähellä toisiaan.*

Tarkastelimme, miten kaksi neljäs–kuudesluokkalaisista koostuvaa lapsiryhmää erosi aivotoiminnoiltaan tässä tehtävässä. Toinen ryhmä koostui tavanomaisesti koulussa suoriutuvista oppilaista, ja toisessa ryhmässä oli muutoin samanlaisia ja samantaitoisia lapsia, mutta heidän laskutaitonsa oli koulua aloittelevan oppilaan tasolla.

Siirryttäessä yksinkertaisista vaativampiin lukumäärän erottelun tehtäviin (ks. kuvio 2A ja 2B) tavanomaisesti myös

aivotoiminnallisen prosessoinnin määrä lisääntyy. Näin ei tapahtunut lapsilla, joille matematiikan oppiminen oli hankalaa. Erityisen mielenkiintoiseksi tuloksemme teki se, että tämä dyskalkulisten ja verrokilasten aivotoimintojen ero näkyi ainoastaan sillä samaisella päälaenlohkon alueella (kuvio 3), josta jo Hécaen kollegoineen (1961) kirjoitti ja jota uudempi tutkimus pitää keskeisenä matemaattisen intuition neuroaalisenä lähteenä (mm. Dehaene ym., 2003; Dehaene, 2009).



Kuvio 3. Tilastollinen ryhmävertailukuva, joka osoittaa ryhmä x etäisyysfaktori -interaktion eli kontrolli- ja dyskalkuliaryhmien eron siinä, millaisen aivoaktivaation kahdenlaiset määrälliset ärsykkeet herättävät (NSF = ei-symbolinen helppo, vrt. kuvio 2a; NSC = ei-symbolinen vaikea, vrt. kuvio 2b).

TARKKA JA EPÄTARKKA JÄRJESTELMÄ KUNTOUTUKSEN VÄLINEINÄ

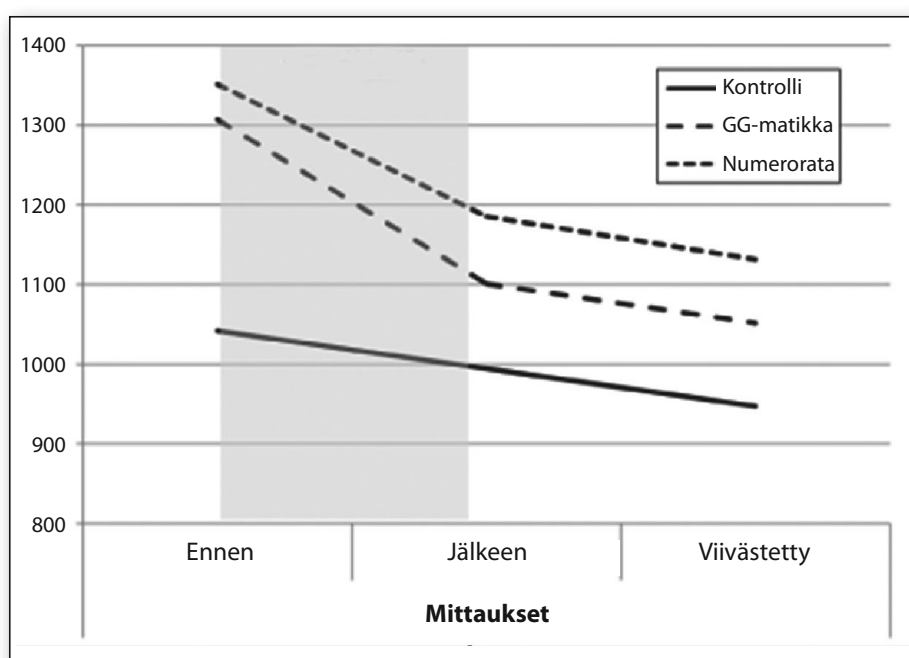
Havaittuamme, että dyskalkulisten ja tavanomaisesti suoriutuvien lasten lukumääräisyyden epätarkan hahmottamisen kyvyssä on aivotoiminnallisia eroja, päätimme selvittää, voidaanko tähän taitoon vaikuttaa harjoittelulla (Räsänen, Salminen, Wilson, Aunio & Dehaene, 2009).

Yhdessä yhteistyökumppanimme kanssa olimme kehittäneet erilaisia tietokoneavusteisia pelejä laskutaitojen harjaannuttamiseen. Pelien teoreettiset lähtökohdat eroavat merkittävästi toisistaan. Ranskalais-uusseelantilaisten tutkijoiden kehittämä peli (Numerorata; Wilson ym., 2006) harjaannuttaa lukujen vertailun taitoja lukumääräisyyden epätarkan hahmottamisen kautta. Jyväskylän yliopis-

ton psykologian laitoksessa kehitetty peli (GraphoGame; Mönkkönen, ym., valmis-teilla) taas lähestyy samaa kysymystä luku-jen luettelemiseen ja tarkkaan määrittä-miseen perustuvien harjoitusten kautta³.

Valitsimme harjoittelijoiksi sellaisia esiopetusikäisiä lapsia, jotka olivat edisty-neet numeerisissa taidoissa selvästi keski-määräistä hitaammin. Lapset jaettiin kah-teen ryhmään pelaamaan jompaakumpaa peliä kolmen viikon ajan. Peliharjoittelun ansiosta molemmissa peliryhmissä luku-jen vertailu sujuvoitui (kuvio 4). Samaa

kehitystä ei tapahtunut matemaattisesti taitavammissa vertailuryhmässä, jossa ei pelattu kumpaakaan peliä. Kahden ryh-män vertailutaitojen sujuvoituminen oli kuitenkin luonteeltaan erilaista, kun sitä tarkasteltiin symbolisen etäisyyssefektin ulottuvuudella. Harjoittelulla näyttäisi siis olevan väliä. Tällä lyhyellä harjoitusjaksol-la ja kapea-alaisesti taitoja harjoittaneilla peleillä ei kuitenkaan saatu aikaan laajem-pia oppimisvaikutuksia muilla laskutaidon osa-alueilla. Tutkimusta on jatkettava.



Kuvio 4. Lukujen vertailun sujuvoituminen tietokoneavusteisen harjoittelun avulla. Mittaukset ennen ja jälkeen harjoittelun sekä harjoittelujakson pituutta vastaavan ajan kuluttua viivästettynä. Peliryhmät edistyivät harjoittelujakson aikana kontrolliryhmään verrattuna, mutteivät eronneet toisistaan. Pienempi aika parempi (ajat 1/1000 s).

LUVUT JÄRJESTYKSEEN JA NOPEASTI

Piaget (1968) väheksyi lukujonotaitojen merkitystä laskutaitojen kehityksessä ja korosti loogis-matemaattista ymmärrystä. Tosin jo silloin, kun Piaget asiaa pohti, oli osoitettu, että lukujonotaidot olivat tärkeitä näiden loogis-matemaattisten taitojen kehittymisen kannalta (esim. Zimiles,

1963; uudemmassa lukujonotaitojen tutkimuksesta ks. Aunio, Hautamäki, Sajaniemi & Van Luit, 2009). Siksipä 1970- ja 1980-luvuilla lasten lukujonotaitojen kehitys oli yksi suosituimmista tutkimuksen kohteista. Vaikka lukujonotaitojen kehitystä on kuvattu runsaasti, niin yllättävän vähän tiedetään niiden oppimisen vaikeuksista ja ennen kaikkea siitä, mitkä kognitiiviset tai-

3) Sekä Numerorata että Ekapeli-matikka-peli ovat vapaasti ladattavissa NMI:n Lukimat.fi-verkkopalvelusta. Ekapeli-matikka on GraphoGamen pohjalta kehitetty laaja-alaisemmin matemaattisia perustaitoja harjoittava peli.

dot ovat olennaisimpia tämän moniulotteisen taidon oppimisen kannalta.

Lukujonotaitojen on toistuvasti osoitettu olevan yksi vahvimmista, ellei paras, myöhempää laskutaitoa ennustavista tekijöistä (Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi, 2007; Koponen, Salmi, Eklund & Aro, valmisteilla). Lukujonotaitoja voidaan mitata jo ennen kouluikää, ja esimerkiksi esikouluiän lukujonotaidot näyttäisivät ennustavan myöhempää laskutaitoa hyvin ainakin neljännelle luokalle asti (Koponen ym., 2007). Siksi tätä taitoa olisi syytä tutkia tarkemmin myös neuropsykologisesta näkökulmasta.

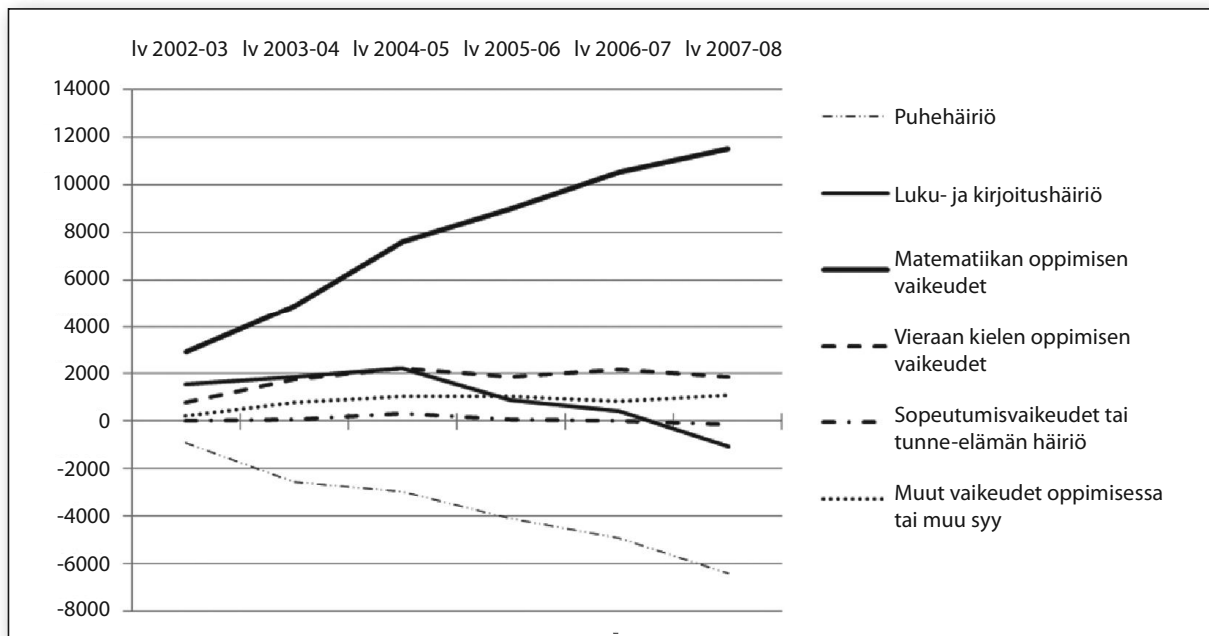
Lukujonotaitojen taustalla yksi taitoutuvuus on hallita sujuvasti sen sarjallinen luonne. Jo Badian (1983) havaitsi, että merkittävällä osalla lapsista, joilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia, oli vaikeuksia sarjallisissa tehtävissä. NMI:n tutkijoista Koponen työtovereineen (Koponen, Mononen, Räsänen, & Ahonen, 2006; Koponen, Aro, Räsänen & Ahonen, 2007) osoittikin, että lapsilla, joilla oli kielenkehityksen häiriöitä, keskeisin yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvoitumista selittävä yleisempi kielellinen mitta oli sarjallisen nimeämisen sujuvuus (NMI:ssä tehty testin suomennos, Ahonen, Tuovinen, & Lepäsaari, 2006). Tätä, yleensä lukemisvaikeuksien vahvana ennusmerkkinä pidettyä mittaa on tutkittu paljon (esim. Heikkilä, Närhi, Aro & Ahonen, 2009). Närhi kumpaneineen (Närhi ym., 2005) analysoi NMI:n lastentutkimusklinikan aineistosta, mihin erilaisiin kognitioihin sarjallisen nimeämisen testi oli yhteydessä. Laajasta neuropsykologisten testien patteristosta vahvimmat yhteydet sarjalliseen nimeämiseen löytyivät epäsanon lukemisen oikeellisuudesta, kielellisestä sujuvuudesta, WISC:n merkkikokeesta sekä dominoivan käden sorminäppäryydestä. Tämän monikomponentiaalisen tehtävän taidollisten

vaateiden avaaminen kokeellisin tutkimuksin voi avata uutta ymmärrystä myös niistä kognitiivisista piirteistä, jotka ovat keskeisiä lukujonotaitojen kehityksen eri vaiheissa.

Luettelutaitojen kehitys kestää vuosia (Fuson, 1988; suomeksi ks. Räsänen, 1999). Ymmärrys siitä, miten tämä kehitys tarkalleen ottaen tapahtuu tai miksi se joskus jää heikosti, on vielä useiden tutkimusten päässä (Aunio ym., 2009). Mitkä kognitiiviset tekijät selittävät sitä, että hyvillä laskijoilla lukujen sarjallinen järjestys lukujonossa on selkeä ja lukujen luettelu kehittyy sujuvaksi? Miten lapsi yhdistää lukujen sarjallisen järjestyksen (ordinaali) sen määrälliseen ulottuvuuteen (kardinaali)? Miten lapsen mielenavaruuteen kehittyy ”mielensisäinen lukujono”? Onko tässä ratkaisevaa lapsen työmuistin laajuus (esim. Kyttälä, Aunio, Hautamäki, 2010)? Näiden kysymysten selvittämiseen myös NMI:n tutkijat panostavat: miten matemaattinen intuitio muuttuu sanoin kuvattavaksi taidoksi?

VOIDAANKO OPPIMISVAIKEUKSIA KUNTOUTTAA?

Koulun erityisopetus pyrkii tarjoamaan keinoja oppimisen vaikeuksien kuntoutukseen. Samalla kun tietoisuus matemaattisista oppimisvaikeuksista on lisääntynyt, myös matematiikan erityisopetuksessa on tapahtunut dramaattinen kasvu (kuvio 5).



Kuvio 5. Osa-aikaisen erityisopetuksen kumulatiivinen muutos vuosina 2002–2008 oppilasmäärinä ensisijaisen syyn mukaan luokiteltuna (ks. tarkemmin Räsänen, Närhi & Aunio, painossa). (lv = lukuvuosi.) Lähde: Tilastokeskus, <http://www.stat.fi/til/erop/>.

Tulokset koulun erityisopetuksen vaikuttavuudesta ovat olleet ristiriitaisia (mm. Räsänen, ym, painossa). Meta-analyysit erilaisista erityisopetuksen interventioista ovat kuitenkin antaneet lupaavia tuloksia. Muun muassa Swanson ja Hoskyn (1998) arvioivat laajassa 180 tutkimusta kattaneessa katsauksessaan erilaisten opetuksellisten interventioiden vaikuttavuuden merkittäväksi ($d = .79^4$). Myös oma analyysimme (Wilson & Räsänen, 2009) matemaattisten vaikeuksien kuntouttamistutkimuksista osoittaa, että opetuksellisiin interventioihin kannattaa panostaa. Mitä yksilöllisemmin tukea voidaan antaa, sitä tehokkaampaa se näyttäisi olevan (Hinselwood, 1917; Wilson & Räsänen, 2009).

Interventiotutkimusten tulokset paljastavat oikeiden menetelmien löytämisen haasteelliseksi. Ei ole yhtä hyvää keinoa lähestyä oppimisen pulmia. Erilaiset opetusmenetelmät näyttäisivät olevan tehokkaita eri-ikäisillä erilaisten matemaattisten sisältöjen opettamisessa. Esimerkiksi

esiopetusikäisille lukukäsitteiden harjoittelussa tehokkainta näyttäisi olevan tutkivan oppimisen lähestymistavat, kun taas alakouluikäisten aritmetiikan sujuvuuden harjoittelussa opettajan kannattaisi – erityisesti heikoille oppijoille – käyttää palautekeskeistä toistoharjoittelua ja suoran strategiaopetuksen lähestymistapaa. Tietämyksen lisääntyminen erilaisten opetuksen menetelmien vaikuttavuudesta tulee olemaan haaste opettajankoulutuslaitoksille. Tuoreessa selvityksessä (Räsänen ym., painossa) jo työssä olevat alakoulujen opettajat pitävätkin kaikkein tärkeimpinä täydennyskoulutuksen aiheina matematiikan oppimisvaikeuksia ja uusia opetusmenetelmiä. Tässä NMI:llä riittää työsarkaa.

MAHDOLLISIMMAN VARHAIN ELLEI AIKAISEMMIN

Kellekään ei liene yllätys seurantatutkimusten tulokset siitä, että se, mitä tapah-

4) Yleisesti käytetyssä Cohenin asteikossa vaikuttavuuden suuruudesta yli .5 keskihajonnan suuruisia muutoksia voidaan pitää ”kohtalaisina” eli ”jo silmin havaittavina” ja yli .8:n suuruisia merkittävänä.

tuu huomattavasti ennen kouluikää, heijastuu hyvin pitkälle kouluun (Melhuish ym., 2008). Aunola (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004) osoitti selkeästi, miten lasten taitoerot matematiikassa kasvavat esikoulun alusta toiselle luokalle edettäessä: nopeat syövät hitaat. Hannula ja Lehtinen (2005) Turun yliopiston Oppimistutkimuksen keskukselta ovat kuvanneet tätä vastaavaa kehityskulkua ennen esikouluikää.

Koska varhaiskehityksen merkitys tiedetään, erilaisia virikeohjelmia varhaislapsuuden kognitiivisen kehityksen tukemiseen on useita. Ongelmana niissä on, että niiden käyttöönotto edellyttää usein kouluttautumista ohjelmien käyttäjiksi ja kouluttautuminen voi myös maksaa melko paljon. Keinojen ei tarvitse kuitenkaan olla niin ihmeellisiä. Esimerkiksi Aino Mattisen (2006) väitöskirjatutkimuksessa päiväkodin seinälle kiinnitettiin akvaariotaulu, jossa olevien kalojen lukumäärää (1–3 kpl) päiväkodin henkilökunta kävi salaa päivän aikana muuttamassa. Tämä innosti lapsia tarkkailemaan, kuinka monta kalaa akvaariossa oli. Se, että lapset saatiin spontaanisti huomioimaan ympärillään olevia lukumääriä, osoittautui oppimiskehityksen kannalta merkitykselliseksi (Hannula, Mattinen, & Lehtinen, 2005).

NMI:ssä on kehitetty yhteistyössä muiden tutkimuslaitosten kanssa keinoja varhentaa matemaattisiin taitopuutteisiin tarttumista: sen voi tehdä helposti käyttöön otettavien, lapsille mielekkäiden pelien ja leikkien avulla. Pirjo Aunion työn tuloksena ja yhteistyössä Helsingin ja Utrechтин yliopistojen tutkijoiden kanssa (van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) syntyi Minäkin lasken -ohjelma esikouluikäisille. Samanikäisille lapsille tarjoaa Jonna Salmisen yhdessä Jyväskylän yliopiston Ekapeli-tutkimusryhmän kanssa kehittämä tietokonepeli mahdollisuuden opetella lukujen ja

lukumäärien maailmaa. Aino Mattisen ja Pekka Räsänen yhdessä Turun oppimistutkimuskeskuksen Minna Hannulan ja Erno Lehtisen kanssa rakentama Nallematikka-ohjelma 3–5-vuotiaille on uusi tulokas tässä joukossa (Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen, 2008; 2010; painossa).

Varhaiskuntoutuksessaolisikuitenkin saatava aikaan samanlainen muutos kuin on tapahtunut koulumaailmassa. Koulussa oppilaan yksilölliset erityisen tuen tarpeet huomioidaan tätä nykyä aivan eri tavoin kuin 20 vuotta sitten. Uusi, syksyllä 2010 voimaan tuleva laki erityisopetuksesta korostaa entisestään varhaisen puuttumisen merkitystä koulumaailmassa. Koulun alku ei ole kuitenkaan biologinen vaan opetusjärjestelmän historiaan liittyvä raja. Ehkä seuraavan 20 vuoden aikana tämä muutos tullaan näkemään: lapselle tarjottavan kognitiivis-emotionaalisen kehityksen ja oppimisen tuen määräävät lapsen tarpeet, eivät institutionaaliset rakenteet.

POIS VAIKEUKSISTA KOHTI TOIMINTAKYKYÄ

Neuropsykologinen tutkimus syöttää opetuksen kentälle lisääntyvässä määrin tietoa siitä, miten voitaisiin paremmin ymmärtää laskutaitojen kehitystä ja sen oppimisen vaikeuksia. Lokalisaatio-opeista on edetty laskemisprosessin pilkkomisen kautta tarkastelemaan laskusuoritusta monimuotoisena ja monivaiheisena aivotapahtumana. Toisaalta ilmiötä voidaan tarkastella hyvin spesifien lukumäärien käsittelyyn erikoistuneiden hermosolujen sähkökemiallisina impulsseina tai toisaalta yleisemmin erilaisten kognitioiden, kuten muistin tai kielen toimintojen, yhteispelinä. Matka tästä ymmärryksestä opetuksen käytänteisiin on koettu pitkäksi, mutta todellisuudessa tutkimuksen havainnot muokkaavat koko

ajan myös opettajien ja oppilaiden itsensä käsityksiä siitä, mistä näissä ilmiöissä on kyse. Muuttuvat käsitykset muuttavat tapoja toimia.

Samanaikaisesti perustutkimuksen edetessä kohti tarkentuvaa kuvaa oppimisen mekanismeista myös kliinisessä oppimisvaikeustutkimuksessa suunta on muuttumassa. Kirkin 1960-luvulla lanseeraamasta spesifin oppimisvaikeuden kapeasta diagnostisesta käsitteestä ollaan luopumassa paremmin lapsen koko todellisuutta kuvastavien käsitteiden tullessa tilalle. Laskutaidottomuuttakaan ei soisi tarkasteltavan enää – ei edes kapea-alaisimmisakaan tapauksissa – yksittäisenä taitopuutteena vaan osana lapsen laajempaa toimintakykyä ja toimintarajoitteita hänen senhetkessä ympäristössään. Tämän muutoksen, jota muun muassa ICF-luokituksen (Stakes, 2004) lisääntyvä käyttö sosiaali- ja terveydenhuollossa tukee, soisi laajenevan myös koulumaailmaan.

Uuden perusopetuslain mukaan oppilaille, joiden oppimisen tukemiseksi tehostetun tuen keinot eivät riitä, on tehtävä ”pedagoginen selvitys”. Olisi toivottavaa, että siitä kehittyisi aidosti moniammatillisesti tehtävä, oppilaan kognitiivis-emotionaalista kehitystä laaja-alaisesti tarkasteleva asiakirja. Vaarana on, että tämän sijasta kouluissa käperrytään helpommin hallittavalta tuntuvaan oppiainekeskeiseen, ”pedagogiseen”, oppimistulosten vertailuun. NMI:llä voi olla merkittävä rooli laaja-alaisen, diagnostisen toimintakykyarviointin kehittäjänä.

EHKÄ JOSKUS KAIKKIEN KOULU

Erityisopetuksen maailmankonferenssin osanottajat antoivat vuonna 1994 Salamancan julistuksen erityisopetuksen periaatteista, toimintatavoista ja käy-

tännöistä. Julistuksessa korostetaan, että koulujen tulee vastaanottaa kaikki lapset riippumatta heidän fyysisestä, älyllisestä, sosiaalisesta, emotionaalista, kielellisestä tai muusta tilasta. Suomi on sitoutunut julistuksen periaatteisiin. Kehitys ei kuitenkaan ole 16:n viime vuoden aikana edennyt merkittävästi tähän suuntaan. Tilastollisesti tarkastellen jokaisesta suomalaisesta koululuokasta puuttuu yksi erityisluokalle sijoitettu lapsi (4 % eli 1/25 lapsista erityisluokilla, Tilastokeskus, 2008, <http://www.stat.fi/til/erop/>). Miten koulun ja opetuksen olisi muututtava, jotta Salamancan tavoitteisiin voitaisiin päästä, on yksi keskeisimpiä oppimisvaikeustutkimuksen tulevaisuuden kysymyksiä.

Kirjoittajatiedot:

Pekka Räsänen, PsL, neuropsykologian erikoispsykologi ja Tuire Koponen, PsT, toimivat tutkijoina Niilo Mäki Instituutissa.

LÄHTEET

- Ahonen, T., Tuovinen, S., & Leppäsaari, T. (1999). Nopean sarjallisen nimeämisen testi. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Haukkarannan koulu.
- Ardila, A. & Rosselli, M. (2002). Acalculia and dyscalculia. *Neuropsychology Review*, 12(4), 179–231.
- Aunio, P., Hautamäki, J., Sajaniemi, N. & Van Luit, J. E. H. (2009). Early numeracy in low-performing young children. *British Educational Research Journal*, 35(1), 25–46.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M., & Nurmi, J. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713.
- Badian, N.A. (1983). Dyscalculia and nonverbal disorders of learning: Progress in Learning Disabilities. H. R. Myklebust (235–264). New York: Grune & Stratton .
- Berger, H. (1926). Über Rechenstörungen bei Hederkrankungen des Grosshirns. *Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten*, 78, 238–263.
- Bergson, H. (1911). *Matter and memory*. New York:

- Macmillan.
- Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions: The case of arithmetic. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 232–259.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20(3–6), 487–506.
- Ehrenwald, H. (1931). Störung der zeitauffassung, der räumlichen orientierung, des zeichnens und des rechnens bei einem hirnerkrankten, *Zeitschrift für die gesamte Neurologie und Psychiatrie* 132, 518–569.
- Feigenson, L. (2007). The equality of quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 11(5), 185–187.
- Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer Verlag.
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from amazonia. *Science*, 306(5695), 496–499.
- Guttman, E. (1936). Congenital arithmetic disability and acalculia (Henschen). *British Journal of Medical Psychology*, 16, 16–35.
- Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction*, 15(3), 237–256.
- Hannula, M.M., Mattinen, A. & Lehtinen, E. (2005). Does social interaction influence 3-year-old children's tendency to focus on numerosity? A quasi-experimental study in day-care. Teoksessa L. Verschaffel, E. De Corte, G. Kanselaar & M. Valcke (toim.), *Powerful learning environments for promoting deep conceptual and strategic learning*. *Studia Paedagogica*, 41, 63–80. Leuven University Press.
- Hécaen, H., Angelergues, R. & Houllier, S. (1961). Les variétés cliniques des acalculies au cours des lésions rétrorolandiques: Approche statistique du problème. *Revue Neurologique*, 105, 85–103.
- Heikkilä, R., Närhi, V., Aro, M. & Ahonen, T. (2009). Rapid Automated Naming and Learning Disabilities: Does RAN Have a Specific Connection to Reading or Not? *Child Neuropsychology*, 15(4), 343–358.
- Henschen S.E. (1920). *Klinische und anatomische Beiträge zu Pathologie des Gehirns*. Stockholm: Nordiska Bokhandeln, Vol. 5.
- Henschen S.E. (1926). Zur lokalisation der Rechenfunktionen. *Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten*, 79, 375–382.
- Hinshelwood, J. (1917). *Congenital word-blindness*. London: H. K. Lewis & Co. LTD.
- Isaacs, E.B., Edmonds, C.J., Lucas, A. & Gadian, D.G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight: A neural correlate. *Brain*, 124(9), 1701–1707.
- Izard, V., Pica, P., Spelke, E. & Dehaene, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical Psychology*, 21(4), 491.
- Koponen, T. (2008). *Calculation and language: Diagnostic and intervention studies*. Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto: Psykologian laitos.
- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97(3), 220–241.
- Koponen, T., Aro, T., Räsänen, P. & Ahonen, T. (2007). Language-Based Retrieval Difficulties in Arithmetic: A single case intervention study comparing two children with SLI. *Educational & Child Psychology*, 24(2), 98–107.
- Koponen, T., Mononen, R., Räsänen, P. & Ahonen, T. (2006). Basic numeracy in children with Specific Language Impairment: Heterogeneity and connections to language. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*, 49, 58–73.
- Koponen, Salmi, Eklund & Aro (valmisteilla). RAN and counting skill: predictors of reading and calculation fluency after controlling for phonological awareness and verbal short-term memory.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 7(3), 165–177.
- Krapf, E. (1937). Über akalkulie, *Sweizerische Archiv für Neurologie und Psychiatrie*, 39, 330–334.
- Kuuskorpi, T. & Keskinen, E. (2008). Psykologien testien käyttö Suomessa: Testaamisen määrä ja yleisimmät testit. www.testilautakunta.fi. (10.4.2008).
- Kyttälä, M., Aunio, P. & Hautamäki, J. (2010). Working memory resources in young children with mathematical difficulties. *Scandinavian Journal of Psychology*, 51(1), 1–15.
- Lewandowsky, M. & Stadelmann, E. (1908). Über einen bemerkenswerten fall von

- hirnblutung und über rechenstörungen bei herderkrankung des gehirns. *Journal für Psychologie und Neurologie*, 11, 249–265.
- Mattinen, A. (2006). Huomio lukumääriin. Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Väitöskirja. Turun yliopisto: Kasvatustieteellinen tiedekunta.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (2008). Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma päiväkodeille. *NMI-Bulletin*, 4, 40–53.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (2010). Nallematikka: 4–5-vuotiaiden lasten oppimisvalmiuksien kehittäminen – pilottitutkimuksen tulokset. *NMI-Bulletin*.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M.M. & Lehtinen, E. (painossa). Nallematikka – Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44 (12), 107–157.
- McCloskey, M., Caramazza, A. & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171–196.
- Mehler, J. & Bever, T.G. (1967). Cognitive capacity of very young children. *Science*, 158, 141–142.
- Melhuish, E.C., Sylva, K., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I., Taggart, B., Phan, M.B. ym. (2008). The early years. Preschool influences on mathematics achievement. *Science (New York, NY)*, 321(5893), 1161–1162.
- Molko, N., Cachia, A., Riviere, D., Mangin, J.F., Bruandet, M., Le Bihan, D. ym. (2003). Functional and structural alterations of the intraparietal sulcus in a developmental dyscalculia of genetic origin. *Neuron*, 40(4), 847–858.
- Moyer, R.S. & Landauer, T.K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519–1520.
- Mönkkönen, A., Richardson, U., Räsänen, P., Herrera Montes, A., Kujala, J., Brem, S. ym. (valmisteilla). Graphogame-Math: Using a computer game for training number skills in preschool aged children.
- Nieder, A. & Miller, E.K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37(1), 149–157.
- Närhi, V., Ahonen, T., Aro, M., Leppäsaari, T., Korhonen, T.T., Tolvanen, A. & Lyytinen, H. (2005). Rapid serial naming: Relations between different stimuli and neuropsychological factors. *Brain and Language* 92, 45–57.
- Peritz, G. (1918). Zur Pathopsychologie des Rechnens. *Deutsche Zeitschrift für Nervenheilkunde*, 61, 23–340.
- Piaget, J. (1952). The child's conception of number. New York: Humanities Press.
- Piaget, J. (1968). "Quantification, conservation, and nativism." *Science*, 162, 976–979.
- Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D. & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44(3), 547–555.
- Pica, P., Lemer, C., Izard, V. & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene group. *Science*, 306(5695), 499–503.
- Poppelreuter, W. (1917). *Die Psychischen und Rechnenschwache der Schulkinder im Lichte des Experiments*. Berlin: Julius Springer.
- Price, G., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M. & Ansari, D. (2008). Impaired parietal magnitude processing in Developmental Dyscalculia. *Current Biology*, 17(24).
- Ruusuvirta, T., Huutilainen, M., Fellman, V. & Naatanen, R. (2009). Numerical discrimination in newborn infants as revealed by event-related potentials to tone sequences. *The European Journal of Neuroscience*, 30(8), 1620–1624.
- Räsänen, P. (1999). *Matematiikan oppimisvaikeudet*. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.), *Oppimisvaikeudet – kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena*. Jyväskylä: Atena kustannus.
- Räsänen, P. & Ahonen, T. (1995). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.), *Oppimisvaikeudet – neuropsykologinen näkökulma*. Helsinki: WSOY.
- Räsänen, P. & Ahonen, T. (2002). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.), *Oppimisvaikeudet – neuropsykologinen näkökulma*. 2., korjattu painos. Helsinki: WSOY.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (painossa). *Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa*. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Matematiikan oppimistulosten kansallinen seuranta-arviointi 6. luokalla vuonna*

2008. Oppimistulosten arviointi x/2010. Opetushallitus.
- Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A., Aunio, P. & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24, 450–472.
- Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662–674.
- Singer, H.D. & Low, A.A. (1933). Acalculia. *Archives of Neurology and Psychiatry*, 29, 467–498.
- Sittig, O. (1917). Über Störungen des Ziffernschreibens bei Aphasischen. *Zeitschrift für Pathopsychologie*, 3, 298–306.
- Sokol, S.M., McCloskey, M., Cohen, N.J. & Alimonsi, D. (1991). Cognitive representations and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 17(3), 355–376.
- Stakes (2004). ICF. Toimintakyvyn, toimintarajoitteiden ja terveyden kansainvälinen luokitus. Helsinki: Stakes.
- Swanson, H.L. & Hoskyn, M. (1998). Experimental intervention research on students with learning disabilities: A meta-analysis of treatment outcomes. *Review of Educational Research*, 68(3), 277–321.
- Van Luit, J.E.H., Aunio, P. & Räsänen, P. (2010). Minäkin lasken! Lasten lukukäsitteen harjoitusohjelma 4–7-vuotiaille lapsille. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Wertheimer, M. (1912). Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung. *Zeitschrift für Psychologie*, 61, 161–265.
- Whalen, J., Gallistel, C.R. & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, 10(2), 130–137.
- Wilson, A.J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S.K., Cohen, L. & Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of "the number race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioural and Brain Functioning*, 2(1), 19.
- Wilson, A. & Räsänen, P. (2009). Effective interventions for numeracy difficulties/disorders. Teoksessa *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. The Canadian Language and Literacy Research Network. <http://www.literacyencyclopedia.ca/>
- Xu, F. & Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74(1), B1–B11.
- Zimiles, H. (1963). A note on Piaget's concept of conservation. *Child Development*, 34, 691–695.