

Elina Rusanen  
Pekka Räsänen

# Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys

*Tutkimuksessamme selvitimme, miten matemaattisilta taidoiltaan heikosti suoriutuvien lasten laskustrategiat yksinumeroisissa yhteenlaskuissa kehittyivät ensimmäiseltä kolmannelle luokalle. Aiemmissä tutkimuksissa laskustrategioita on tarkasteltu vaiheittaisena kehityksenä kaikkien laskettavien luettelemisesta kohti lukuyhdistelmien muistamista. Tässä tutkimuksessa lapsen käyttämä laskutapa ja laskutavan sisällä käyttämä strategia eroteltiin kahdeksi ulottuvuudeksi, joiden avulla pyrittiin luomaan tarkempi kuva yksilöllisestä kehityksestä. Kolmannen luokan opettajat valitsivat opetusryhmistään (n = 55) viisi laskutaidoiltaan heikointa oppilasta, joille arvottiin samoilta luokilta verrokkit. Näiden lasten yhteenlaskutavat ja -strategiat oli kartoitettu jo kertaalleen ensimmäisen luokan tammikuussa, ja sama tutkimus toistettiin kolmannen luokan keväällä. Verrokkiryhmäläisten käyttämien yhteenlaskustrategioiden kehityskulku noudatti tavanomaista kehitystä konkreettisesta kohti abstraktia. Sen sijaan tutkimusryhmäläisten kehityskulut olivat tästä poikkeavia ja hyvin yksilöllisiä. Tutkimus osoittaa, että opettajien on syytä kiinnittää huomiota sekä lasten*

*käyttämiin laskujen ratkaisutapoihin että lasten niissä käyttämiin strategioihin. Laskustrategioiden kuvaamisen kaksiulotteista mallia voitaisiin hyödyntää myös erityisen tuen tarpeen arvioinnissa, kehityksen seurannassa sekä pedagogisen selvityksen apuvälineenä.*

Asiasanat: yhteenlasku, laskustrategioiden kehitys, erityisopetus

## JOHDANTO

Matematiikan taidoiltaan heikkojen oppilaiden laskustrategioiden kehittymistä verrattuna tavanomaiseen kehitykseen on tutkittu hyvin vähän (Jordan, Hanich & Kaplan, 2003, 835). Aiemmissä tutkimuksissa on lähinnä luokiteltu lasten käyttämiä laskustrategioita ja niiden kehitystä. Sujuvat peruslaskutaidot ovat pohja myöhemmälle ongelmattomalle matematiikan oppimiselle (Calhoon, Emerson, Flores & Houchins, 2007; Geary, Liu, Chen, Saults & Hoard, 1999; Geary, Saults, Liu & Hoard, 2000). Jos lapsi ei hallitse lukualueen 0–20 yhteen- ja vähennyslaskuja, on moninumeroisten tehtävien ratkaisemi-

nen sekä kertotaulujen oppiminen todella työlästä ja hidasta. Taidoiltaan heikot lastajat eivät näyttäisi oppivan muistamaan vastauksia peruslaskuihin, vaan joutuvat vanhemmalla iälläkin turvautumaan luettelemiseen tai sormiensa käyttöön saadakseen tehtävät ratkaistua (mm. Geary, 2004; Ostad, 1999). He näyttäisivät kehittyvän strategioiden käyttäjinä tavanomaisesta poikkeavasti, tai sitten strategioiden käytön kehitys on vain tavanomaista hitaampaa (Ostad, 1999). Koulu ei kuitenkaan yleensä tarjoa mahdollisuutta hitaampaan kehitykseen, vaan taidot pitää omaksua nopeasti, jotta monimutkaisempien sisältöjen oppiminen olisi mahdollista.

Erottellemme tässä laskutavat ja laskustrategiat. Laskutavoissa kehitys kulkee tavanomaisesti konkreettisesta kohti abstraktia. Aluksi lapsi joutuu turvautumaan ulkoisten muistintukien kuten sormiensa tai palikoiden käyttöön, sillä kaikkien toimintojen suorittaminen mielessä ei vielä onnistu (Aunio, Hannula & Räsänen, 2004, 201.) Vähitellen sormien käyttö väistyy pelkän mielessä luettelemisen ja muistamisen tieltä (Carpenter & Moser, 1984, 191). Laskutapojen kehityksellä tarkoitammekin sitä, miten lapsi etenee konkreettisten esineiden laskemisesta niiden käyttöön ainoastaan muistin tukena ja tästä edelleen vain mielessä tapahtuvaan luettelemiseen tai vastauksen muistista hakemiseen.

Luettelemiseen perustuvien laskutapojen sisällä kehityksestä erotetaan kolme erilaista strategista vaihetta, jotka ovat kaiken laskeminen, ensimmäisestä luvusta aloittaminen sekä suuremmasta luvusta aloittaminen (Butterworth, 2005, 9). Yleensä kaiken laskemista tapahtuu vain lapsilla, jotka turvautuvat sormilla laskemiseen, mutta kahta jälkimmäistä esiintyy sekä sormien avulla että mielessä laskettaessa. Ensimmäisestä yhteenlaskettavasta alkavaa luettelemista kutsutaan max-strategiaksi silloin, kun ensimmäinen luku on pienempi, ja suuremmasta yhteenlaskettavasta alkavaa luettelemista min-strategiaksi. Min-strategiassa lapsi pyrkii minimoimaan laskuvaiheet (Groen & Parkman, 1972.) Tutkijat ovat pohtineet, esiintyykö max-strategiaa lainkaan (ks. esim. Baroody, 1987, Carpenter & Moser, 1984, Siegler & Jenkins, 1989).

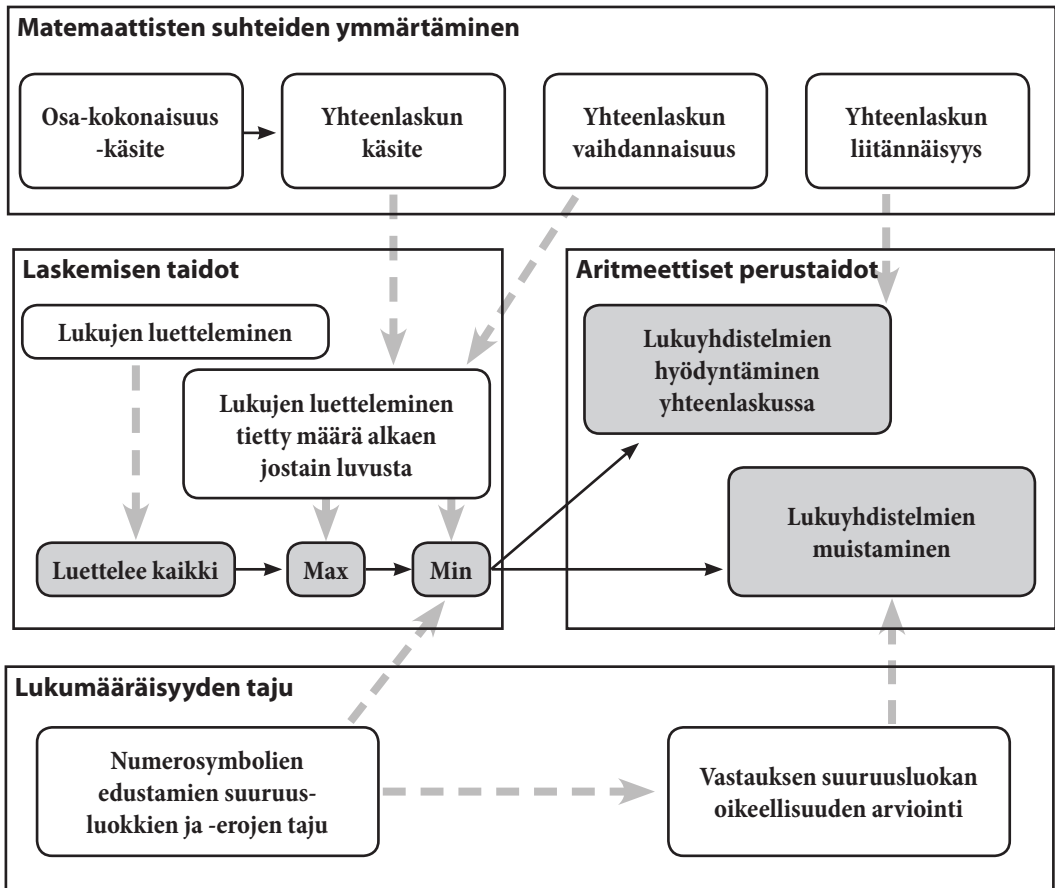
Muistamiseen perustuvista strategioidista erotetaan tyypillisimmin lukuyhdistelmien hyödyntämiseen perustuvat strategiat sekä täysin mielestä palauttamiseen perustuva laskutapa. Laskujen ratkaisemisen tukena käytettäviä lukuyhdistelmiä ovat muun muassa kymppiparit eli ne luvut, joiden summa on kymmenen (esim.  $4 + 6$  ja  $8 + 2$ ), sekä tuplat eli kahden saman luvun yhteenlaskut ( $4 + 4$ ,  $6 + 6$ ). Lukuyhdistelmiä opetellaan koulussa, jotta niitä voisi hyödyntää yhteenlaskussa. Toisaalta ne myös auttavat lapsia kehittämään joustavia ajattelustrategioita tehtävien ratkaisemiseksi (Steinberg, 1985). Toiset lukuyhdistelmät jäävät mieleen paremmin kuin toiset, ja niitä voidaan hyödyntää myös muita lukuja sisältäviä tehtäviä ratkaistaessa. (Carpenter & Moser, 1984, 196.)

Vastauksen muistaminen on sujuvin ja nopein laskutapa. Tätä kuvataan yleensä taidon automatisoitumisen käsitteellä. Peruslaskutaitojen ajatellaan automatisoituneen, kun lapsen ei enää tarvitse luotella mielessään tai ratkaista tehtävää toisen tehtävän kautta (Baroody, 1987; Carpenter & Moser, 1984.). Taidon automatisoitumisella tarkoitetaan kuitenkin usein myös sitä, että suoritus ei enää edellytä tarkkaavaisuuden keskittämistä (vrt. sanan lukeminen sujuvalla lukijalla). Se, missä määrin yhteenlaskujen mieleen palautuminen on automaattista tai edellyttää muistiassosiaation tahdonalaista hakemista, on tutkimusalue, joka edellyttää vielä merkittävää määrin työtä.

Laskutapojen kehitys ei ole lineaarista, sillä lapset saattavat käyttää useampaa strategiaa samanaikaisesti. Lapsella voi samanaikaisesti tulla mieleen laskun vastaus kun hän ratkaisee sitä luettelemalla. Yleisesti ottaen sekä laskutapojen että -strategioiden kehittyminen näyttäisi kuitenkin noudattavan tiettyä jatkumoa: konkreettisista apuvälineisiin tukeutuvista strategioista kohti abstrakteja mielessä tapahtuvia strategioita. Mielessä luuttelemiseen

perustuvat strategiat ovat tehokkaampia ja vaativat kehittyneempiä laskutaitoja kuin suora mallintaminen. Pienet lapset käyttävät enemmän konkreettisia laskutapoja kuin vanhemmat lapset, jotka kykenevät käyttämään abstraktimpia ja tehokkaampia laskutapoja ja laskemisstrategioita. (Carpenter & Moser, 1984, 182.)

Kuvioon 1 olemme koonneet Lukimat.fi -tietopalvelun nelikenttämalliin (Aunio & Räsänen, 2007) sijoitettuna las-



Kuvio 1. Laskustrateginen kehitys sijoitettuna keskeisten matemaattisten taitoryppäiden malliin (Aunio & Räsänen, 2007). Laskustrategiat tummennetuissa laatikoissa. Katkoviivat kuvastavat yhteyksiä niistä muista matemaattisista taidoista, jotka tukevat kyseisen strategian kehitystä.

kustrategisen kehityksen vaiheet ja niihin liittyvät muut keskeiset matemaattiset taidot. Laskustrategisen kehityksen taustalla voidaan nähdä monia erilaisia matemaattisten taitojen käsitteellisiä ja toiminnallisia taitoja.

Uusien strategioiden oppimista saattaa joidenkin lasten kohdalla hidastaa se, etteivät he koe tarvitsevansa uusia tapoja tehtävien ratkaisemiseen. He pitävät käyttämäänsä strategiaa riittävän nopeana, tehokkaana ja toimivana. Uuden oppiminen on työlästä ja hidastaa laskemista ainakin hetkeksi. (Steinberg, 1985.) Kuten aina uutta opittaessa, vähitellen harjoituksen myötä taito vakiintuu ja muuttuu automatisoituneeksi ja tiedostamattomaksi. Näin käy myös lukuyhdistelmien hyödyntämisen kohdalla (Steinberg, 1985).

Lasten käyttämien laskutapojen valintaan vaikuttavat henkilökohtaiset, sosiaaliset ja kognitiiviset syyt (Steinberg, 1985). Briars ja Larkin (1984) olettavat, että jos lapsilla on käytössään useampia vaihtoehtoisia laskutapoja, he käyttävät sitä tapaa, joka vaatii vähiten laskuvaihteita, ja pyrkivät välttämään vaikeampia laskemisprosesseja, kuten takaperin luetteleminen. Toisaalta taas Carpenterin ja Moserin (1984, 189) mukaan lapset käyttävät hallitsemiaan tapoja vaihtelevasti, eivätkä ainoastaan tehokkainta. Siegler ja Jenkins (1989) sen sijaan havaitsivat tehtävän vaikeudella olevan merkitystä lasten laskutavan valinnassa: mitä vaikeampi tehtävä, sitä enemmän varmistusstrategioiden osuus lisääntyy. Lapsi saattaa yrittää ensin palauttaa vastauksen suoraan muististaan, mutta jos se ei onnistu, hän siirtyy johonkin varmistusstrategiaan.

Ostadin tutkimuksessa (1999) lapset, joilla oli vaikeuksia matematiikassa, käyttivät lähes yksinomaan konkretiaan ja luetteleamiseen perustuvia varmistusstrategioita vielä yläkouluun siirtyessäänkin eivätkä

oppineet muistamaan lukuyhdistelmiä. Tavanomaisesti suoriutuvat lapset puolestaan siirtyvät käyttämään mieleenpalauttamisstrategioita yhä suuremmassa määrin mitä vanhempia he olivat (Geary, 2004; Ostad, 1999). Tavanomaisesti suoriutuvat oppilaat siis vaihtelevat laskutapoja joustavasti, ja heidän käyttämänsä strategiat kehittyvät. Taidoiltaan heikot laskijat sen sijaan eivät vaihtele laskutapoja ja heidän käyttämänsä strategioiden kirjo on rajoittuneempi (Ostad, 1999, 34.)

Koska aikaisemmat tutkimukset esittävät, että matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioissa tapahtuu hyvin vähän muutoksia heidän kasvaessaan, päätimme tarkastella laskustrategista kehitystä yksityiskohtaisemmin erottelamalla laskutavan ja sen sisällä käytetyn laskustrategian toisistaan. Oletuksemme oli, että näin voitaisiin paremmin kaivaa esille myös taidoiltaan vähiten kehittyneiden lasten kehitystä. Tätä kehityskulkua kontrastoitiin paremmin laskutaidoissaan kehittyneiden verrokkilasten laskemiseen.

## MENETELMÄ

### Otos

Tutkimuksemme kohdejoukko muodostui kymmenestä oppilaasta. He kaikki opiskelivat kolmannella luokalla yleisopetuksen ryhmässä. Kaikki kymmenen oppilasta olivat olleet samassa koulussa myös ensimmäisellä luokalla ja osallistuneet ensimmäiseen mittaukseen, mikä oli tutkimukseen mukaan pääsyy edellytys. Muutoksen tutkiminen ensimmäiseltä kolmannelle luokalle on perusteltua, sillä sormilla laskemisen tavoissa tapahtuu selvä muutos ensimmäisen luokan alusta toiselle luokalle edettäessä eikä toisen ja neljännen luokan välissä näyttäisi tapahtuvan enää niin suuria muutoksia (Räsänen & Koponen,

2010). Seurantatutkimuksella voidaan saada paremmin selville yksilöllisiä kehityskulkuja.

Seurantatutkimusvaiheessa luokanopettajat ja erityisopettajat valitsivat kolmen luokan oppilaista tutkimukseemme mielestään viisi taidoiltaan heikointa lasta: sellaisia, jotka tukeutuivat edelleen paljon sormiinsa laskiessaan eivätkä olleet edenneet laskusujuvuudessaan toivotulla tavalla. Näiden viiden lisäksi jokaiselle valittiin verrokki, joka oli samalla luokalla aakkosissa seuraava samaa sukupuolta oleva oppilas. Tällä tavoin tutkimukseemme valikoitui kuusi tyttöä ja neljä poikaa. Kaikkien kymmenen oppilaan vanhemmat antoivat lapsilleen kirjallisen luvan osallistua tutkimukseen. Tutkimusryhmään kuuluvilla lapsilla on keksityt peitenimet (Riina, Kirsi, Ulpu, Risto ja Kimmo) ja verrokkiryhmän lapsilla numerokoodit.

## MENETELMÄT

Laskutavat ja -strategiat. Tutkimus<sup>1</sup> sisälsi kaksi mittausta, joissa käytettiin samoja yksinumeroisten lukujen yhteenlaskusarjoja. Yhteenlaskuissa oli kaksi rinnakkaisista sarjaa, a ja b, joissa kummassakin oli 12 tehtävää. Laskut olivat paperilapuilla, jotka levitimme pöydälle lapsen eteen. Lapsi sai valita laskut yksi kerrallaan haluamassaan järjestyksessä. Esitimme ensimmäisen sarjan lapselle visuaalisesti: lapsi luki itse tehtävän ja vastasi siihen suullisesti. Toisen sarjan kanssa toimimme muuten samalla tavalla, mutta luimme tehtävän lapselle, jolloin lasku tuli auditiivisesti. Rinnakkais-

sarjoissa oli kummassakin samat tehtävät, mutta luvut eri järjestyksessä: sarja a:ssa  $2 + 5$  ja sarja b:ssä  $5 + 2$ . Puolet tehtävistä sisälsi kymmenylityksen.

Tehtävätilanne videoitiin, ja lapsen laskusuoritus koodattiin suoritusvaiheittain (esim. sormilla laskemisesta jokainen laskettu sormi ja niiden laskujärjestys). Mikäli lapsen käyttämä laskustrategia ei ollut ilmeinen ja suoraan havainnoitavissa suorituksesta, lapselta kysyttiin, miten hän oli ratkaissut tehtävän. Mikäli lapsen kuvaama strategia ja havainto suorituksista olivat ristiriidassa keskenään, havaintoa käytettiin kriteerinä. Mikäli suoritusta ei pystytty luokittelemaan, sitä ei otettu mukaan analyysiin. Ensimmäisen luokan strategialuokittelun arvioitsijareliabiliteetti (icc) oli laskustrategioille .863 kahdenkymmenen lapsen, kahden arvioitsijan ja 480 tehtävän otoksessa.

Opettajat ja erityisopettajat valitsivat heikosti suoriutuvat oppilaat tutkimukseen. Lisäksi lasten kolmannen luokan taitojen arvioimiseksi opettajat testasivat oppilaansa ryhmämittauksin seuraavilla tehtävillä. Testitietoja ei käytetty oppilaiden valintakriteerinä.

Aritmetiikka (Aunola & Räsänen, julkaisematon). Kolmen minuutin aritmetiikan testi sisältää yksi- ja useampinumeroisia yhteen- ja vähennyslaskuja kokonaislukuilla vaikeutuvassa järjestyksessä. Tehtävästä lasketaan oikeiden vastausten määrä.

Yksinumeroiset yhteen-, vähennys- ja kertolaskut (Koponen, julkaisematon). Paperille on kirjoitettu kaikki yksinumeroiset yhteen-, vähennys- ja kertolaskut

---

<sup>1</sup> Tässä raportoitavien tuloksien lisäksi tutkimus sisälsi useita erilaisia ensimmäisellä luokalla käytettyjä kognitiivisia mittareita sekä kolmannella luokalla käytettyjä tietokoneavusteisia mittareita. Nämä tulokset raportoidaan erikseen.

riveittäin satunnaisessa järjestyksessä. Kuttakin laskuoperaatiota varten lapselle annetaan kaksi minuuttia aikaa. Tehtävästä lasketaan oikeiden vastausten määrä.

Päättely (Räsänen, 2000; Langdon & Warrington, 1997). Päätelytehtävässä lapselle esitetään kolmen luvun sarja ja sen perään neljä vaihtoehtoa sarjan jatkamiseksi. Tehtävässä on 30 osiota. Tehtävän suorittamiseen annetaan kymmenen minuuttia aikaa. Tehtävästä lasketaan oikeiden vastausten määrä.

### Tutkimuksen toteutus

Tutkimuksemme aineisto koostui ensimmäisen luokan mittauksista keväältä 2008 sekä kolmannella luokalla keväällä 2010 tekemistämme mittauksista. Ensimmäisen luokan mittaukset teki kaksi tutkimusavustajaa ja kolmannen luokan mittaukset ensimmäinen kirjoittaja. Tutkimusta varten koululta järjestyi rauhallinen huone, jonne oppilaat saapuivat yksitellen. Yhden lapsen osalta tutkimus kesti kerrallaan viidestätoista minuutista puoleen tuntiin riippuen lapsen laskunopeudesta. Tilanne videoitiin.

Jos strategia ei näyttänyt selvältä, kysimme jokaisen tehtävän jälkeen lapselta, miten hän oli ratkaissut tehtävän. Jos lap-

si kertoi ratkaisseensa sen päässä laskien, pyrimme lisäkysymyksillä selvittämään, miten hän oli tehtävän mielessään ratkaissut. Jatkoimme kyselemistä, kunnes lapsen käyttämä strategia tuli selväksi tai lapselta ei ollut odotettavissa enää mitään uutta tietoa. (Ks. esim. Siegler & Jenkins, 1989, 52.) Tausta-ajatuksena oli, että lapsi osaa heti tehtävän suoritettuaan verbaalisesti kertoa ratkaisutavastaan (mm. Carpenter & Moser, 1984; Ostad, 1999, 26; Siegler, 1988, 844).

Luokittelimme lasten yhteenlaskuissa käyttämät laskutavat ja -strategiat taulukon 1 mukaisesti. Loimme jokaiselle lapselle laskijaprofilin, josta selvisivät hänen käyttämänsä eri strategiat sekä se, kuinka monta kertaa hän oli mitäkin strategiaa käyttänyt mittauksen aikana. Profiliin perusteella luokittelimme lapset.

Yhteenlaskumallissa ensimmäinen laskutapa on sormien tai muiden apuvälineiden käyttäminen (Baroody, 1987; Carpenter & Moser, 1984). Tätä seuraa sormien käyttäminen tukena, joka vastaa lähinnä Sieglerin (Siegler & Shrager, 1984) esittelemää sormistrategiaa, jossa lapsi tarvitsee sormiaan vain luettelemisen vahvistukseksi, mutta ei tukeudu niihin ensisijaisesti. Kaksi viimeistä laskutapaa

**Taulukko 1. Yhteenlaskujen luokittelu laskutavan ja -strategioiden mukaan**

Laskutapa	Laskustrategia
1. Lapsi käyttää sormiaan tai muuta ulkoista tukea. Lapsi voi joko a. laskea sormistaan tai b. käyttää sormiaan osittain luettelemisen tukena.	Lapsi luettelee kaikki luvut. Lapsi luettelee aloittaen ensimmäisestä luvusta (max-strategia). Lapsi luettelee aloittaen suuremmasta luvusta (min-strategia). Lapsi hyödyntää lukuyhdistelmiä.
2. Lapsi luettelee ääneen tai mielessään.	Lapsi luettelee kaikki luvut. Lapsi luettelee aloittaen ensimmäisestä luvusta (max-strategia). Lapsi luettelee aloittaen suuremmasta luvusta (min-strategia). Lapsi hyödyntää lukuyhdistelmiä.
3. Lapsi muistaa vastauksen.	Lapsi vastaa muistamansa perusteella.
4. Laskutapaa ei voi määrittää.	Laskustrategiaa ei voi määrittää.

ovat luetteleminen ja muistaminen, jotka esiintyvät kaikkien edellä mainittujen tutkijoiden luokittelussa. Laskustrategiat jaottelimme kaiken luettelemiseen, max-strategiaan, min-strategiaan, lukuyhdistelmiin sekä muistamiseen. (Baroody, 1987; Carpenter & Moser, 1984; Geary, Hoard, Byrd-Carven & DeSoto, 2004; Groen & Parkman, 1972.) Sijoitimme lapset malliin heidän tyypillisimmän strategiansa mukaisesti.

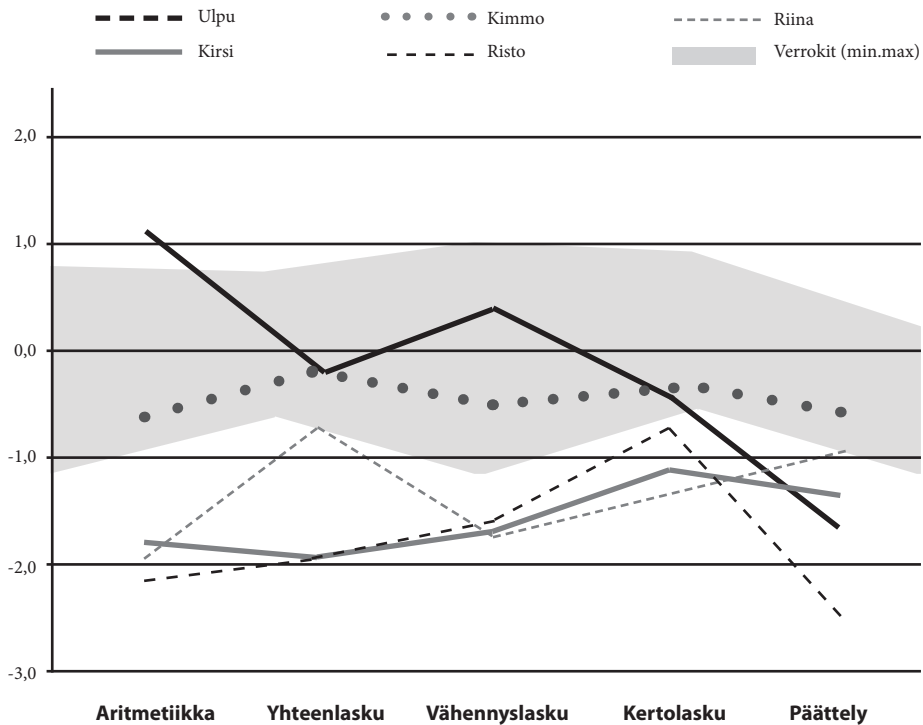
## TULOKSET

Kuviossa 2 on esitetty lasten tulokset kolmannen luokan ryhmätesteistä. Kuviossa lasten pistemäärät on esitetty standardi-

pisteinä ( $k_a = 0$ ,  $k_h = 1$ ) laskettuna koko otoksen ( $n = 55$ ) pistemääristä tehtävittäin.

Kuten kuvioista on havaittavissa, kolme tutkimusryhmäläistä (Riina, Kirsi ja Risto) suoriutuivat selvästi ikätasoa ja verrokkiryhmää heikommin kaikissa tehtävissä. Sen sijaan Kimmon suoritus vastasi verrokkiryhmäläisten suoritusta. Ulpun suoritus poikkesi sekä tutkimus- että verrokkiryhmästä siten, että hän suoriutui keskitasoisesti tai jopa keskimääräistä paremmin aritmeettisista tehtävistä, mutta selvästi heikommin päättelytehtävistä.

Tuloksia tarkasteltiin laadullisesti. Kuvio 3 havainnollistaa lasten käyttämien laskutapojen ja -strategioiden kehitystä, ja kuviossa 4 on esitetty lasten suoritusten oikeellisuusprosentit. Yksityiskohtaiset



**Kuvio 2. Lasten suoriutuminen ryhmätesteissä standardipisteinä koko aineiston ( $n=54$ ) tuloksista laskettuna.**

kuvaukset kunkin lapsen suorituksista ensimmäisellä ja kolmannella luokalla löytyvät Rusasen (2011) erillisestä raportista.

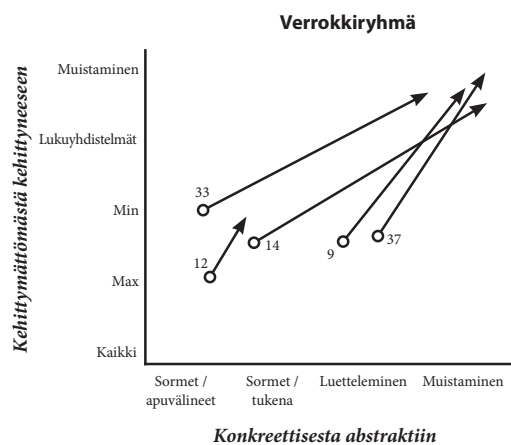
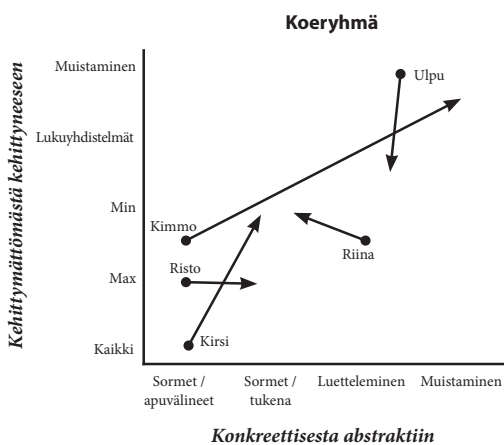
Ensimmäisellä luokalla tutkimusryhmän ja verrokkiryhmän käyttämissä strategioissa ei ollut havaittavissa selkeitä ryhmien välisiä eroja. Eri lapsia kuvaavat pisteet hajaantuivat melko tasaisesti, mutta ne painoutuivat luettelemiseen tukeutuvien strategioiden ja konkreettisten laskutapojen suuntaan. Ensimmäisen luokan mitaushetkellä näiden laskujen opettelu oli opetus suunnitelman mukaan keskeinen opeteltava asia (Perusopetuksen opetus suunnitelman perusteet 2004).

Kolmannella luokalla verrokkiryhmäläiset olivat siirtyneet selkeästi muistamiseen perustuvien strategioiden suuntaan. Yhtä lasta (kh 12) lukuun ottamatta he luettelivat vain yksittäisten tehtävien kohdalla. Kehitystä oli tapahtunut vaaka-suunnan lisäksi myös pystysuunnassa, eli lapset olivat siirtyneet min- ja max-strategioiden käytöstä lukuyhdistelmien hyödyntämiseen ja vastauksen muistamiseen.

Verrokkiryhmäläisten strategioiden kehitys on keskenään hyvin samansuuntaista. Verrokkiryhmäläisistä poikkeuksen muodosti yksi lapsi (kh 12), joka oli edennyt ensimmäisestä luvusta eteenpäin luettelamisesta suuremmasta luvusta aloittamiseen. Sama lapsi suoriutui verrokkilapsista heikoiten ryhmätutkimuksessa.

Verrokkilapsista poiketen tutkimusryhmäläisten kehitys oli täysin yksilöllistä. Kimmon kehitys muistutti eniten verrokkiryhmäläisten kehitystä sekä strategioissa että vastausten oikeellisuudessa. Myös hänen suoriutumisenensa ryhmämittauksessa oli hyvin samankaltaista verrokkiryhmäläisten kanssa. Hän on tehnyt samankaltaisen siirtymän konkreettisten strategioiden käytöstä muistamiseen perustuviin strategioihin kuin suurin osa verrokkiryhmäläisistäkin.

Kirsi ja Risto tukeutuivat kolmannella luokalla edelleen sormiinsa. He olivat kuitenkin edenneet vaaka-akselilla hieman oikealle eli laskutavoissaan edenneet konkreettisesta kohden abstraktimpaa, ja



**Kuvio 3. Laskutapojen ja -strategioiden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle. Vasemmalla tutkimusryhmäläisten ja oikealla verrokkiryhmäläisten kehitys.**

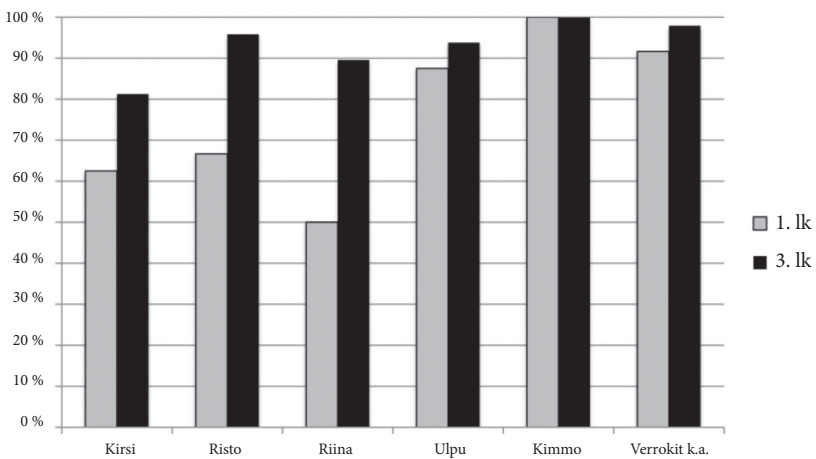


he tarvitsivat sormiensa antamaa ulkoista tukea hieman vähemmän kuin ensimmäisellä luokalla. Sormet toimivat enemmän luettelemalla laskemisen tukena verrattuna ensimmäisen luokan suoritukseen, jossa koko laskusuoritus tapahtui sormista laskemalla. Kirsin kehitys oli positiivisempaa, koska hän oli edennyt min-strategian käyttöön, sen sijaan Risto laski edelleen usein ensimmäisestä luvusta aloittaen riippumatta siitä, oliko se laskettavista suurempi vai pienempi luku.

Kaksiulotteinen luokittelu paljastaa yksiulotteista tarkastelua paremmin Ulpun ja Riinan tavanomaisesta poikkeavan kehityksen. Molempien kehitys näyttäisi menneen taaksepäin. Ensimmäisellä luokalla Riina teki paljon virheitä (ks. kuvio 4) ja ratkaisi tehtävät luettelemalla yleensä ensimmäisestä luvusta eteenpäin. Kolmannella luokalla hän huomioi enemmän laskettavien lukujen suuruuseroa ennen laskemisen aloittamista ja otti sormet use-

emmin laskusuorituksensa tueksi. Tämän varmistusstrategian käyttöönoton seurauksena myös oikeiden vastausten määrä oli lisääntynyt.

Ulpun kehityskäyrä on mielenkiintoinen. Opettajat arvioivat hänen matemaattiset taitonsa heikoiksi. Kuitenkin kaikissa laskemisen ryhmätehtävissä hänen suorituksensa oli vähintäänkin keskitasoista. Lisäksi hän oli jo ensimmäisellä luokalla ainoa, joka laskustrategiassaan tukeutui muistamiseen ja lukuyhdistelmiin, eikä hänen suoritustensa oikeellisuus poikennut merkittävästi verrokkiryhmäläisistä. Näyttäisi siltä, että opettajien kokemus Ulpun matemaattisten taitojen heikkouksista ei liity aritmeettisten perustaitojen heikkouteen, vaan matemaattisen päättelykyvyn puutteisiin, jotka tulevat ilmi enemmän sovellustyyppisissä tehtävissä kuin tässä tutkituissa yksinumeroisten lukujen laskustrategisissa taidoissa.



**Kuvio 4. Oikeiden vastausten prosenttiosuudet yhteenlaskutehtävissä ensimmäisellä ja kolmannella luokalla tutkimusryhmäläisillä sekä verrokkiryhmän keskiarvot.**

## POHDINTA

Aiemmissä tutkimuksissa on todettu, että lapset, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, eivät hallitse sujuvasti edes peruslaskutoimituksia. Tämä sujuvoittumattomuus näkyy jo yksinkertaisimmissa yksinumeroisissa yhteenlaskutehtävissä. Näiden taitopuutteiden vaikutus kumuloi-tuu siirryttäessä useampinumeroisiin laskuihin. Toinen keskeinen havainto aiemmissä tutkimuksissa on, että näiden lasten laskustrategiat muistuttavat nuorempien, vasta taitoja opettelevien lasten strategioita (mm. Baroody, 1987; Carpenter & Moser, 1984; Ostad, 1999).

Ostad (1999) totesi, että taidoiltaan heikkojen laskijoiden strategioiden kehitys voisi olla joko hitaampaa tai täysin poikkeavaa. Hänen tutkimuksessaan jäi osittain epäselväksi, millä tavoin kehitys on poikkeavaa. Geary (2004, 7) puolestaan havaitsi, että ensimmäiseltä toiselle luokalle siirryttäessä lapset, joilla oli vaikeuksia matematiikassa, luottivat edelleen vahvasti konkreettisiin strategioihin, kun muut ryhmät olivat siirtyneet abstraktimpien luetteluun ja muistamiseen perustuvien strategioiden suuntaan. Lapsilla, joilla oli vaikeuksia matematiikassa, oli Jordanin ryhmän (2003) tutkimuksessa ongelmia lukuyhdistelmien mieleen palauttamisessa, mikä johti myös huonompaan laske- missujuvuuteen. Lisäksi lapset luottivat enemmän sormiinsa kuin vertailuryhmät vielä kolmannenkin luokan lopulla.

Havaintomme tässä tutkimuksessa olivat pääpiirteissään yhteneviä aikaisempien tutkimusten kanssa. Verrokkiryhmäläiset olivat kahdessa vuodessa kehittyneet luettelemispohjaisia laskustrategioita käyttävistä ulkomuistista yhteenlaskut osaviksi: konkreettisista kohti abstrakteja strategioita. Tutkimusryhmäläisten kehityskulku oli sen sijaan hyvin yksilöllistä

ja poikkesi verrokkiryhmäläisten kehityskulusta. Heidän kehityksenä oli hitaampaa, ja taidoiltaan heikkojen laskijoiden kolmannella luokalla käyttämät strategiat muistuttivat enemmän tavanomaisten laskijoiden ensimmäisellä luokalla käyttämiä strategioita. Ensimmäisellä luokalla tutkimusryhmäläisten ja verrokkiryhmäläisten käyttämät strategiat sen sijaan eivät vielä poikenneet ratkaisevasti toisistaan. Kehityksen seurantaan tarvitaan, sillä taitojen arviointi vain ensimmäisellä luokalla ei näyttäisi paljastavan luotettavasti tulevaa kehitystä.

Aiemmista tutkimuksista poikkeava kaksiulotteinen lähestymistapamme paljasti, että tarkemmin analysoituna myös heikosti suoriutuvien oppilaiden strategioiden käytössä voi tapahtua merkittäviä muutoksia. Muutos voi edetä konkreettisesta kohti abstraktia, mutta myös konkreettisuuteen perustuvan strategian sisällä. Luomamme kaksiulotteinen malli havainnollistaa sitä, ettei strategioiden kehitys ole yksiulotteista eikä matemaattisilta taidoiltaan heikoilla lapsilla kehitys ole aina yksiselitteisesti kuvattavissa lineaarisena muutoksena kohti kehittyneempiä laskustrategioita. Ryhmien välisten erojen (kuvio 3) vertaaminen kahden luokka-asteen aineiston avulla puolestaan toi kokonaisnäkömyksen siitä, miten taidoiltaan heikkojen ja tavanomaisten kehitys näyttäisi eroavan toisistaan (ks. Siegler & Jenkins, 1989, 95–96.)

Tutkimusryhmän lapset olivat opettajien valitsemia, heidän kokemuksensa perusteella taidoiltaan heikkoja oppilaita. Vaikka otos oli hyvin pieni, jo näiden viiden lapsen taidoissa ja kehityksessä oli löydettävissä merkittäviä eroja, joilla voi olla diagnostista ja opetuksellista merkitystä. Kolme viidestä opettajan valitsemasta lapsesta poikkesi laskustrategioiden kehityksessään verrokkiryhmästä selkeästi.

Huomionarvoista on se, että vaikka heidän käyttämänsä laskutavat ja -strategiat olivat samanlaisia tavanomaisesti suoriutuvien lasten kanssa, he erosivat jo ensimmäisellä luokalla selvästi muista tutkituista oppilaista oikeiden vastausten määrässä. Yksi heikosti suoriutuvaksi arvioitu muistutti taidoiltaan ja strategioiden kehitykseltään verrokkiryhmää ja yksi poikkesi selvästi sekä verrokeista että tutkimusryhmäläisistä. Verrokkiryhmän lapsista neljällä viidestä strategioiden kehityskulku oli hyvin samansuuntainen, ja heikoin heistä muistutti enemmän tutkimus- kuin verrokkiryhmän muita jäseniä.

Kaksiulotteinen mallimme nostaa esille mielenkiintoisen yksityiskohdan. Aiemmassa tutkimuskirjallisuudessa tutkijat ovat pohtineet, esiintyykö max-strategiaa lainkaan vai onko se kenties vain hyvin lyhytkestoinen strateginen välivaihe (ks. esim. Baroody, 1987, Carpenter & Moser, 1984, Siegler & Jenkins, 1989). Max-strategiassa lapsi lähtee liikkeelle ensimmäisestä laskettavasta, vaikka se olisi pienempi luku, ja luettelee jälkimmäisen. Huomattavasti helpomman min-strategian ydin on siinä, että lähtökohdaksi otetaan luvuista suurempi ja siitä lähdetään laskemaan luettelemalla eteenpäin (esim.  $4 + 8 = 8 + 2$ ,  $2, 3, 4 = 12$ ). Yllätykseksemme kaksiulotteinen malli paljasti max-strategian varsin yleiseksi ensimmäisellä luokalla. Erityisen mielenkiintoinen oli tapaus Risto, joka kahden vuoden aikana kehittyi erittäin vähän taidoissaan. Hän tukeutui ensimmäisellä luokalla lähes täysin sormiinsa, ja vielä kolmannellakin luokalla hän haki laskuunsa usein tukea sormistaan. Laskustrategista kehitystä hänellä ei ollut tapahtunut oikeastaan lainkaan. Risto käytti lähes kaikissa laskuissa, joissa ensimmäinen luku oli pienempi, max-strategiaa sekä ensimmäisellä että kolmannella luokalla.

Max-strategiasta eteneminen min-

strategiaan edellyttää kahta asiaa (ks. kuvio 1). Ensiksikin lapsen tulee ymmärtää yhteenlaskun vaihdannaisuuden idea ( $2 + 3 = 3 + 2$ ) (matemaattisten suhteiden ymmärtäminen), ja toisaalta lukujen pitäisi automaattisesti herättää vahva kokemus niiden suuruusluokasta ja suuruuserosta (lukumääräisyyden taju), joka ohjaisi lapsen huomioimaan suuremman luvun ensin. Aikaisemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että lapsilla, joilla on erityisiä matemaattisia oppimisvaikeuksia, on heikosti kehittynyt taju lukujen ja lukumäärien suuruusluokasta (Piazza, Facoetti, Trussardi, Berteletti, Conte ym., 2010; Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen & Ansari, 2008). Juuttuminen max-strategiaan saattaa siis olla merkittävä indikaattori perustavammanlaatuisista matemaattisista oppimisvaikeuksista. Tutkimusaiheena tämä kysymys voisi avata kokonaan uuden alueen matemaattisten oppimisvaikeuksien tutkimuksessa: matemaattis-kognitiivisten prosessien yhteys lasten laskustrategioiden kehitykseen.

Tutkimuksemme osoittaa myös, että opettajien tulisi kiinnittää huomiota lasten käyttämiin laskustrategioihin. Jotta peruslaskutaidot automatisoituisivat, opetuksessa olisi hyvä tehdä lapsille näkyväksi erilaiset laskustrategiset vaihtoehdot. Lapsille pitäisi opettaa joustavaa strategioiden käyttöä (Ostad, 1999; Sophian, 1992). Tuki- ja erityisopetuksen yksilöllisempi tuki mahdollistaa keskittymisen yksittäisen lapsen strategioiden harjoittamiseen. Koska uuden oppiminen rakentuu vanhan päälle (mm. Sophian, 1992, 39–40), strategioiden opettamisessa kannattaisi tietoisesti edetä konkreettisesta kohti abstraktia, mutta samalla harjoitella lukuyhdistelmien hyödyntämistä, sillä niiden käyttäminen onnistuu myös konkreettisten strategioiden vaiheessa olevilta lapsilta (Steinberg, 1985).

Tässä artikkelissa esittelemämme laskutapojen ja -strategioiden kuvaamisen kaksikulotteinen malli voisi tarjota opettajille käsitteellisen viitekehyksen lasten yhteenlaskutaitojen tarkempaan analysointiin. Samalla tavalla voidaan lähestyä myös vähennyslaskua. Lapsen senhetkisten taitojen yksityiskohtaisen tarkastelun avulla opettaja voi päästä syvemmälle lapsen osaamisen ymmärtämisessä ja samalla tarkempaan käsitykseen siitä, millaista tukea oppimiselleen lapsi tarvitsee.

Tuoreet tutkimukset ovat osoittaneet, että tietystä luvusta eteenpäin luettelemiseen perustuvat lautapelit edistävät lasten laskutaitojen kehitystä (esim. Ramani & Siegler, 2008). Se, aloittaako lapsi luettelemisen alusta (ykkösestä) vai eteenpäin siitä luvusta, jossa hänen pelinappulansa sattuu sijaitsemaan, näyttää olevan yllättävän tärkeää laskutaitojen oppimisen kannalta (Laski, E. kirjeenvaihto 17.3.2011; Laski & Siegler). Samoin on todettu, että lautapelit, joissa luvut on esitetty lukusuorana, ovat alle kouluikäisten matematiikan oppimisessa tehokkaampia kuin sellaiset, joissa luvut ovat esimerkiksi kehämuodossa (Siegler & Ramani, 2009). Tällaiset tulokset osoittavat, että harjoittelussa hyvinkin pienillä yksityiskohdilla voi olla iso merkitys. Tulokset myös osoittavat, että pienetkin yksityiskohdat siinä, millaisia strategioita lapset luettelemisessaan käyttävät, voivat vaikuttaa suuresti opetuksen tuloksellisuuteen. Sillä on merkitystä, miten lapsia ohjataan – askel askeleelta – kohti kehittyneempiä laskustrategioita ja sujuvampaa laskutaitoa.

#### Kirjoittajatiedot:

Elina Rusanen, Kasvatustieteiden laitos, erityispedagogiikka, Jyväskylän yliopisto  
Pekka Räsänen, Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä

#### Kiitokset:

Tämä tutkimus on toteutettu osana Niilo Mäki Instituutin matematiikan oppimisen tutkimushankkeita, ja raportin analyysit perustuvat Elina Rusanen erityispedagogiikan pro gradu -tutkielmaa varten tekemään työhön (Rusanen, 2011).

## LÄHTEET

- Aunio, P., Hannula, M. & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 198–221. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2007). Keskeiset matemaattiset taitorypät esi- ja alkuopetusikäisillä lapsilla. Saatavilla osoitteessa <http://www.lukimat.fi/matematiikka/tietopalvelu/matemaattisten-taitojen-kehityksesta>
- Aunola, K. & Räsänen, P. (julkaisematon). Kolmen minuutin aritmetiikan testi. Jyväskylän yliopisto.
- Baroody, A.J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 141–157.
- Briars, D.J. & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1(3), 245–296.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*. 46(1), 3–18.
- Calhoon, M.B., Emerson, R.W., Flores, M. & Houchins, D.E. (2007). Computational fluency performance profile of high school students with mathematics disabilities. *Remedial and Special Education*, 28(5), 292–303.
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3),

- 179–202.
- Fuchs, L.S. & Fuchs, D. (2007). A model for implementing responsiveness to intervention. *Teaching Exceptional Children*, 39(5), 14–20.
- Geary, D.C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15.
- Geary, D.C., Hoard M.K., Byrd-Craven J. & DeSoto, M.C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88, 121–151.
- Geary, D.C., Liu, F., Chen, G.-P., Saults, S.J. & Hoard, M.K. (1999). Contributions of computational fluency to cross-national differences in arithmetical reasoning abilities. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 716–719.
- Geary, D.C., Saults, S.J., Liu, F. & Hoard, M.K. (2000). Sex differences in spatial cognition, Computational Fluency, and Arithmetical Reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 337–353.
- Groen, G.J. & Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review* 79 (4), 329–343.
- Jordan, N.C., Hanich, L.B. & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 7 (3), 834–850.
- Koponen, T. (julkaisematon). Yhteen-, vähennys- ja kertolaskutehtävät. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Langdon, D.W. & Warrington, E.K. (1997). The abstraction of numerical relations: A role for the right hemisphere in arithmetic? *Journal of International Neuropsychological Society*, 3, 260–268.
- Laski, E. & Siegler, R. (submitted). Making Number Board Games Even Better.
- Opetushallitus. (2004). Perusopetuksen opetus-
- suunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.
- Ostad, S. (1999). Developmental progression of subtraction strategies: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, 14(1), 21–36.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.M., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S. & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33–41.
- Price, G., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M. & Ansari, D. (2008). Impaired parietal magnitude processing in Developmental Dyscalculia. *Current Biology*, 17(24), 1042–1043.
- Ramani, G.B. & Siegler, R.S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79, 375–394.
- Rusanen, E. (2011). "Mä tälleen nopsasti käytin sormia" – Lasten laskustrategioiden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle. Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma. Kasvatustieteiden laitos, Jyväskylän yliopisto.
- Räsänen, P. (julkaisematon). ART – aritmeettinen päättelytehtävä. Niilo Mäki Instituutin matemaattisia tehtäväsarjoja. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Räsänen, P. & Koponen, T. (2010). Development of children's finger-counting habits. Kongressiesitelmä. Meeting in Honour of Professor Brian Butterworth: "Numbers in the Brain". 26.–27.11.2010.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008, 165–203. Koulutuksen seurantaraportit

2010:2. Helsinki: Opetushallitus.

- Siegler, R.S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development*, 59, 833–851.
- Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). How children discover new strategies. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Siegler, R.S. & Ramani, G.B. (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101, 545–560.
- Siegler, R.S. & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? Teoksessa C. Sophian (toim.), *Origins of cognitive skills*, 229–293. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sophian, C. (1992). Learning about numbers: Lessons for mathematics education from preschool number development. Teoksessa J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (toim.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 19–40.
- Steinberg, R. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(5), 337–355.