

Erja Lusetti  
Pirjo Aunio

# Esikoululaisten matemaattisten taitojen kehityksen tukeminen

## Minäkin lasken! -harjoitusohjelmalla

*Varhaislapsuudessa saavutetut taidot ja tiedot lukumääristä, luokittelusta, vertailusta ja muista matemaattisista käsitteistä luovat pohjaa koulumatematiikan oppimiselle. Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, tapahtuuko matemaattisesti heikkojen esikouluikäisten lasten matemaattisissa taidoissa kehittymistä, kun heille tarjotaan rikastettua opetusta ”Minäkin lasken!” -ohjelman (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) avulla. Harjoitusohjelman vaikuttavuus voitiin tutkimuksessa tilastollisesti osoittaa: interventoryhmän lasten taidot kehittyivät tutkimusjakson aikana enemmän kuin kontrolliryhmän lasten. Huomattavin edistyminen tapahtui lukukäsitteen (lukumäärä, lukusana, numeromerkki sekä yhteen- ja vähennyslasku) hallinnassa. Harjoitusohjelman alkaessa interventoryhmän lasten matemaattiset taidot olivat heikommalla kuin kontrolliryhmän lasten. Loppumittauksessa ryhmien välinen ero oli hävinnyt. Ryhmien välisiä eroja ei ollut myöskään havaittavissa vuosi intervention lopettamisen jälkeen.*

Asiasanat: matemaattiset taidot, esiopetus, harjoittaminen, interventio

Matemaattiset taidot alkavat kehittyä hyvin varhain. Varhaislapsuudessa saavutetut taidot koskien esimerkiksi lukumääriä, luokittelua, vertailua ja muita matemaattisia käsitteitä luovat pohjaa ja viitoittavat tien koulumatematiikan oppimiselle (Aunio, 2008). Lasten kehitys on yksilöllistä, mikä näkyy merkittävinä taitoeroina jo esikouluikässä (Aunola ym., 2004; Kinnunen & Vauras, 1998). Kouluun tultaessa lasten matemaattisten taitojen heikkoudet jäävät valitettavan usein huomaamatta. Matemaattisilta taidoiltaan heikot lapset voivat jäädä vaille riittävää tukea ja harjoitusta alkuvaiheen taitojen ja käsitteiden kehittämisessä, jotka ovat kuitenkin välttämättömiä myöhemmän oppimisen kannalta (Hannula & Lepola, 2006.) Lasten matemaattisten taitojen kehityksen on todettu etenevän kumulatiivisesti siten, että lasten väliset yksilölliset erot kasvavat suuremmiksi lasten edetessä esiopetuksesta toiselle luokalle (Aunola ym., 2004). Lähtötasoltaan vahvojen esikoululaisten taitojen on todettu kehittyvän nopeammin kuin lähtötasoltaan heikkojen (Aunola ym., 2004; Lehtinen & Kinnunen, 1993.) Tämä tarkoittaa sitä, että lapset, joilla on

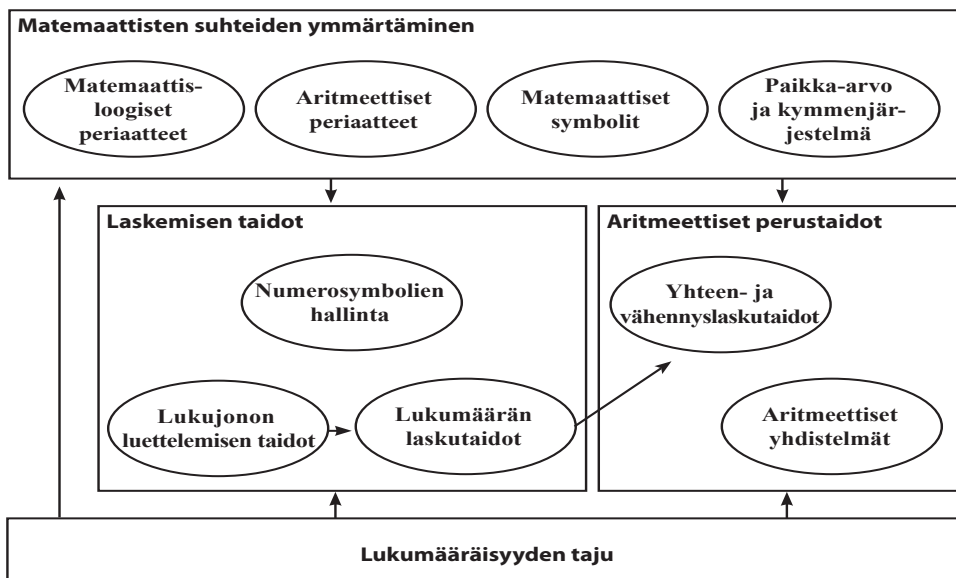
hyvä matemaattinen osaaminen, kykenevät jatkuvasti vahvistamaan taitojaan, jolloin ero heikompiin lapsiin kasvaa entisestään.

Esiopetuksen tehtävä on tukea lapsen kasvua ja kehitystä sekä puuttua ennaltaehkäisevästi oppimisen pulmiin. Esikoulu-ikäisten matemaattisten taitojen kehittymistä pitää seurata, jotta joukosta tunnistetaan ne lapset, jotka tarvitsevat lisätukea matemaattisessa kehityksessään, jotta myöhemmiltä oppimisen pulmilta voitaisiin välttyä. Taitojen vahvistamiseen voidaan panostaa jo esiopetusvuoden aikana. Lapsille, jotka eivät ole omatoimisesti kiinnostuneita esimerkiksi numeroiden oppimisesta tai lukumäärillä operoimisesta, esiopetus tarjoaa mahdollisuuden harjoitella ja saavuttaa ikätovereiden taitoja. Tavoitteena on lasten välisten erojen tasoittuminen ja paremmat edellytykset koulumatematiikan oppimiselle.

## ESIOPETUSIKÄISTEN KESKEISET MATEMAATTISET TAITOALUEET

Lapset oppivat ja heille kehittyy runsaasti matemaattisia taitoja jo varhaislapsuudessa (Sarama & Clements, 2009). Nämä ennen koulun alkua ja alkuopetuksessa kehittyvät taidot luovat perusteet koulun matematiikan hallinnalle, jonka katsotaan rakentuvan selvemmin varhaisemmin opitun varaan kuin monien muiden kouluikäisten oppimisen (Ahonen ym., 1997).

Aunio ja Räsänen (www.lukimat.fi/taitojenkehitys) ovat koonneet kirjallisuusanalyysiin perustuvan mallin esi- ja alkuopetusikäisten lasten keskeisistä matemaattisista taitoalueista. Mallissa keskeiset matemaattiset taidot jaetaan neljään päätaitoalueeseen, jotka koostuvat useammista osataidoista (kuvio 1). Neljä päätaitoaluetta on laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukumääräisyyden taju sekä



Kuvio 1. Keskeiset matemaattiset taitoalueet esi- ja alkuopetusikäisillä lapsilla (Aunio, 2008)

matemaattisten suhteiden ymmärtäminen. Näistä taidoista ennen koulua keskiössä ovat laskemisen taidot, matemaattis-logiciset periaatteet, lukumääräisydentaju ja aritmeettisten perustaitojen harjoittelun aloittaminen (Aunio, 2008).

### Laskemisen taidot

Laskemisen taitoihin kuuluvat lukujonon luettelemisen taidot, lukumäärän laskemisen taito (jossa laskemisessa käytetään hyväksi lukujonon luettelemisen taitoa) sekä numerosymbolien hallinta. Lukujonon oppiminen on pienten lasten matemaattisen ajattelun kehityksessä olennainen vaihe. Lukujonotaitojen kehittymistä pidetään keskeisenä lukukäsitteen ja laskutaidon oppimisen edellytyksenä. Lukujonotaidot kertovat yleensä myös siitä, kuinka lapsi oppii hallitsemaan koulun aritmetiikkaa: mitä paremmat lukujonotaidot, sitä paremmat aritmeettiset taidot (Aunio & Niemivirta, 2010; Kinnunen ym., 1994). Lukujonon luettelemisen harjoittelu alkaa jo varhain. Alkuvaiheessa tällä luettelulla ei ole vielä matemaattista sisältöä, vaan se on pikemmin kielellinen tapahtuma, jossa lapsi luettelee lukusanoja kuin mitä tansa lorua (Sophian, 1998; Aunio ym., 2004). Lukujonotaidot ovat alussa lapsella enemmän suoritustaitoja kuin käsitteellisiä taitoja, vaikka pienetkin lapset tietävät numeroiden viittaavan lukumääriin. Vähän yli kaksivuotiaat näyttävät ymmärtävän, että lukusanat eroavat jollakin tavoin muista kuvailevista sanoista ja että ne viittaavat lukumäärään (Räsänen, 2001).

Lukujonotaidon ja lukujonokäsitteen kehittymisessä voidaan erottaa viisi eri kehitysvaihetta: lukusanojen ääneen luetteleminen (acoustic counting), eriaikaislaskeminen (asynchrone counting), samanaikaislaskeminen (synchronic counting), tuloksen laskeminen (resultative counting) ja lyhentynyt laskeminen (shortened

counting) (Fuson, 1992; van de Rijt, Van Luit & Penning, 1999). Lukusanojen ääneen luettelemisen vaiheessa, noin kolmen ikävuoden iässä, lapsi ”loruilee” lukusanoilla. Lukusanat ovat ulkoa opittu rimpsu, jota ei välttämättä sanota oikeassa järjestyksessä ja jolla ei ole yhteyttä lukusanojen erityismerkitykseen eikä määrin laskemiseen. Eriaikaisen laskemisen vaiheessa, noin neljän vuoden iässä, lapsi käyttää lukusanoja oikeassa järjestyksessä, mutta objektien osoittaminen ja ääneen laskeminen eivät ole vielä samanaikaisia. Noin neljä- ja puolivuotiaana, samanaikaislaskemisvaiheessa, lapsi osaa järjestää laskettavat esineet laskeakseen ne ja lukusanojen ja esineiden osoittaminen sujuvat yhtä aikaa. Tuloksen laskemisen vaiheessa, noin viiden vuoden iässä, lapsi ymmärtää, että laskeminen aloitetaan luvusta yksi, jokainen laskettava esine saa yhden lukusanan, se lasketaan yhden kerran ja että viimeinen lukusana ilmoittaa koko joukon lasketun määrän. Lyhentyneen laskemisen vaiheessa lapsi käyttää esimerkiksi nopan silmälukua (5) hyväkseen ja aloittaa eteenpäin luettelun siitä. Tämän laskemista nopeuttavan taidon alkaa hallita noin 5½–6-vuotias lapsi.

Lukukäsitteen hallinta edellyttää yhteyksien syntymistä kolmen elementin välillä: lukusanan (kolme), numeromerkkin (3) ja todellisten esineiden (kolme palikkaa). Mitä kehittyneempi kuva lapselle on muodostunut luvuista ja lukujonosta, sitä vähemmän hänen tarvitsee tukeutua lukuja ja lukumääriä kuvaaviin ulkoisiin symboleihin kuten sormiin, palikoihin tai kirjoitettuihin lukuihin. (Aunio ym., 2004.) Lukujonotaitojen luokittelu yksinkertaisempiin ja kehittyneempiin tapahtuu sen suhteen, miten vaativia kognitiivisia operaatioita ne sisältävät. Luokituksessa huomioidaan neljä näkökohtaa: suunta (eteen, ja taaksepäin), lukualue (alle 10, yli

10), millaisin askelin liikutaan (yksi, useampi) ja millaista työmuistin kuormitusta lapselta edellytetään (yksi tai useampi asia pidettävä samanaikaisesti mielessä). Kehittyneemmille lukujonotaidoille on ominaista taito aloittaa laskeminen mistä tahansa luvusta sekä eteenpäin että taaksepäin. Niin ikään luettelemisen jatkaminen jostain muusta luvusta kuin luvusta yksi on tärkeä lukujonoluettelemisen taito, sillä se nopeuttaa laskemista. Tämä mahdollistuu järjestyksen ja lukuisuuden integroitumisen kautta (Kinnunen ym., 1994).

Lukusanojen käyttö esineiden lukuisuuden määrittämisessä on matemaattis-loogiselta sisällöltään monitasoinen tapahtuma, johon lapsen matemaattisen ajattelun kehitystaso vaikuttaa. Lukuisuuden määrittämisen edellytys on monien eri osaprosessien onnistuminen. Jonoon järjestettyjen esineiden laskeminen lukusanojen avulla on melko yksinkertainen ja mekaaninen tapahtuma. Sen sijaan epä määräisessä järjestyksessä olevien esineiden lukumäärän laskeminen edellyttää toiminnallista strategiaa, joka perustuu yksi yhteen -suhteeseen asettamiseen (Kinnunen ym., 1994). Lukumäärän käsitteen hallinta edellyttää lapselta seuraavia asioita: 1) yksi yhteen -vastaavuuden ymmärtämistä, 2) ymmärrystä siitä, että joukoilla on lukumäärä ja että muutokset joukossa vaikuttavat lukumäärään, 3) ymmärrystä siitä, että myös abstrakteilla asioilla voi olla lukumäärä sekä 4) kykyä tunnistaa pieniä lukumääriä (alle 5 yksikköä) visuaalisesti ilman luettelemalla laskemista (Butterworth, 2005.)

### Aritmeettiset perustaidot

Lukujonotaitojen kehittyminen tukee saumattomasti yhteen- ja vähennyslaskutaitoja, sillä laskutaidossa yhdistyvät lukujonotaidot ja lukukäsite (Vainionpää ym., 2003,

296; Aunio, 2008.). Lapset oppivat käytännön kokemusten kautta pikkuhiljaa yhdistämään luettelemalla laskemisen yhteen- ja vähennyslaskuun. Pienellä lukualueella (1–3) ja konkreettisten esineiden avulla jo kolmevuotiaat osaavat ratkaista yhteen- ja vähennyslaskuja. Neljän–viiden vuoden ikäinen lapsi hyödyntää tehtäviä ratkaistessaan luettelemalla laskemista. Ja viiden–kuuden vuoden iässä lapsi suoriutuu yleensä jo sanallisessa muodossa olevista yksinkertaisista yhteen- ja vähennyslaskuista. Lasten lukujonon luettelustrategian kehittyminen mahdollistaa sekä suurempia lukumääriä koskevien että sanallisesti esitettyjen ongelmien ratkaisemisen.

Esimerkiksi Carpenterin ja Moserin (1983) esittämä malli aritmeettisten taitojen kehittymisestä kuvaa sitä, miten luettelemalla laskeminen kehittyy yhteen- ja vähennyslaskustrategiana. Yhteenlaskun kohdalla kehityksessä on erotettu kolme vaihetta. Ensi vaiheessa lapsi käyttää apunaan konkreettisia esineitä, kuten sormiaan ja lukujonon luettelemista. Esimerkiksi yhteenlaskussa  $3 + 2$  lapsi laskee ensin kolme sormea ”yksi, kaksi, kolme” ja sitten kaksi ”yksi, kaksi”, minkä jälkeen hän laskee uudelleen kaikki yhteenlaskettavat sormet ”yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi”. Toisessa vaiheessa oleva lapsi ymmärtää jo, että ensimmäistä yhteenlaskettavaa ei ole välttämätöntä tehdä näkyväksi. Esimerkiksi laskussa  $3 + 5$  lapsi laskee ensimmäisestä luvusta, kolmosesta, suoraan eteenpäin käyttäen sormia apunaan ”neljä, viisi, kuusi, seitsemän, kahdeksan”.

Seuraavassa kehitysvaiheessa lapsi huomaa, että on tehokkaampaa ja vähemmän virheeltistä aloittaa laskeminen suuremmasta yhteenlaskettavasta. Lapsi käyttää sormia kuvaamaan kahden yhteenlaskettavan kokonaisuuden lukumäärää (muistin tukena), mutta hänen ei enää tarvitse laskea yksittäisiä sormia. Tämä kol-

mas kehitysvaihe edellyttää sitä, että lapsi ymmärtää yhteenlaskutuloksen olevan sama, vaikka yhteenlaskettavat lasketaan eri järjestyksessä. Mallissa esitetyt tasot eivät ole tarkkarajaisia, sillä lapsien käyttämät strategiat ovat hyvin tehtäväkohtaisia. Vähennyslaskun strategiat kehittyvät Carpenterin ja Moserin (1983) mukaan suurimmilta osin samoin kuin yhteenlaskussakin. Aluksi lapsi tarvitsee konkreettista tukea ja useita vaiheita saavuttaakseen oikean tuloksen, mutta vähitellen kokemusten myötä ja taitojen kehittyessä lapsi oppii hyödyntämään aritmeettisiä faktoja tehtäviä laskiessaan (Anghileri, 2000).

### **Matemaattisten suhteiden ymmärtäminen**

Lukumääriä koskevat aritmeettiset operaatiot tulevat mahdollisiksi, kun lapsi oppii vertailemaan lukukäsitettä ja lukumääriä. Matemaattis-loogisista periaatteista keskeisimpiä nuorimpien lapsien kehityksessä ovat sarjoittaminen, vertailu, luokittelu ja yksi yhteen -vastaavuus (Kinnunen ym., 1994; Aunio, 2008; Aunio, Hautamäki & Van Luit, 2005). Yksi yhteen -vastaavuus ja sarjoittaminen ovat kiinteästi yhteydessä lukujonoon ja sen ordinaali- (järjestysluku) ja kardinaali- (perusluku) piirteiden ymmärtämiseen. Luokittelu- ja vertailutaitoja tarvitaan päätelmien teossa sekä monenlaisissa matemaattisissa ongelmanratkaisutehtävissä. Taito vertailla on oleellinen myös luvun säilymisen ymmärtämisen kannalta (lapsi ymmärtää esinejoukkojen lukumäärän säilyvän samana, vaikka laskettavien yksilöiden kokoa tai järjestystä muutettaisiin). Vertailujen ja päätelmien tekeminen lukumäärien eroista edellyttää käsitteiden enemmän, vähemmän ja yhtä monta hallintaa. Esineiden ryhmittelemisen luokkiin tai alaluokkiin jonkin kriteerin mukaan sisältää matemaattista ongelmanratkaisua. Luokittelun taito vaatii

lapselta kykyä nähdä eroja esineiden välillä ja kykyä ryhmitellä esineitä yhteisten ja erilaisten piirteiden perusteella.

### **Lukumääräisyydentaju**

Lukumääräisyydentajua eli kykyä hahmottaa lukumääriä ilman laskemista pidetään perustavanlaatuisena matemaattisena kykyä, jonka varaan kielellinen (kulttuurinen) matemaattinen taito rakentuu. Kyvyn ajatellaan pohjautuvan synnynnäiseen mekanismiin. Lukumääräisyydentajun katsotaan olevan edellytyksenä sille, että lukumäärän ja sitä vastaavan käsitteen välille voi syntyä miellelyhtymä (Dehaene, 1997; Räsänen, 2001).

Pikkulapset ovat tietoisia lukumääristä, vaikka eivät osakaan laskea. Vastasyntyneet erottavat sekä näkö- että kuuloärsykkeillä kahden kolmesta ja joskus kolmen neljästä. Pienten lasten lukumäärien vertailun oletetaan perustuvan esineryhmistä muodostuvaan visuaaliseen mielikuvaan (Ahonen ym., 1997). Havaintojärjestelmämme epätarkkuuden vuoksi suurempien lukumäärien kohdalla tarvitaan kieli tai jokin muu symbolijärjestelmä, jonka kautta lukumäärä voidaan hahmottaa vastaavuuksien avulla. (Räsänen, 2001; Vainionpää ym., 2003.) Lukumäärien ja niiden erojen hahmottaminen onnistuu hyvin pienillä lukumäärillä, mutta lukumäärän kasvaessa käy hahmottaminen epätarkemmaksi ja verrattavien lukumäärien suhteesta riippuvaiseksi. Mitä suuremmista lukumääristä on kyse, sitä suurempi on oltava määrien välisen eron, jotta se huomattaisiin.

Yksinkertaisimmillaan nämä lukumäärän hahmottamisen kaksi mekanismia, pienten lukumäärien tarkka hahmottaminen ja lukumäärien suhteellinen eron hahmottaminen, eivät edellytä kielen oppimista tai harjoittelua (Vainionpää ym., 2003; Aunio ym., 2004). Ihmisten välillä

on kuitenkin eroja siinä, miten tarkka heidän lukumääräisyyden hahmottamisen kykynsä on. Neuropsykologiset tutkimukset viittaavat (esim. Ansari, 2010; Landerl, Bevan & Butterworth, 2004) siihen, että kyvyn tarkkuus tai epätarkkuus voisi selittää esimerkiksi joitakin matemaattisia oppimisvaikeuksia (dyskalkuliaa). Mikäli lukumääräisyyden hahmottamisen kyky on lapsella hyvin epätarkka, lukujen välisten suuruussuhteiden hahmottaminen ei kehity hyvin.

Osalla lapsista on taipumus tarkastella spontaanisti esineiden, tapahtumien ja asioiden lukumääriä, ja näin he saavat suuren määrän kokemuksia lukumääristä ja niiden käyttämisestä. Suomalaiset tutkimukset vahvistavat, että lapsen taipumus kiinnittää spontaanisti huomiota ympäristössä esiintyviin lukumääriin on selkeästi yhteydessä matemaattisten taitojen kehittymiseen. Siten erot lasten lukumääriin liittyvissä taidoissa alkavat kasvaa jo varhaislapsuudessa. (Hannula, 2005; Hannula & Lehtinen, 2005; Mattinen, 2006.) Muun muassa Mattisen (2006) tutkimus osoitti kolmevuotiaiden lasten matemaattisessa kehityksessä olevan suuria eroja, ja hän totesi päiväkotien toimintakäytäntöjen olevan yhteydessä lasten taipumukseen kiinnittää spontaanisti huomiota lukumääriin. Mattisen mukaan lapsissa voi ja tulee herättää ja vahvistaa taipumusta kiinnittää huomiota jokapäiväisessä ympäristössä esiintyviin lukumääriin.

## **PIENTEN LASTEN MATEMATIIKAN TAITOJEN INTERVENTIOT**

Pienten lasten matematiikanharjoitusohjelmien vaikuttavuutta koskevaa kirjallisuutta on kansainvälisestikin vähän. Vaikuttavuuden tutkimista ja vertailtavuutta vaikeuttaa esimerkiksi lasten erilaiset

taustat (esim. heikoista sosioekonomisista taustoista tulevat lapset [Clements & Sarama, 2008] vs. lapset, joilla on oppimisvaikeuksia [Bryant ym., 2008]), erilainen toteutus (esim. tietokoneavusteinen harjoittelu [Räsänen ym., 2009] vs. pienryhmäinterventio [Kidd ym., 2008] taikka osaamisen arviointiin käytettyjen välineiden erilaisuus (standardoidut mittarit [Chard ym., 2008] vs. ei-julkaistut arviointivälineet [Lai, Baroody & Johnson, 2008]).

Suomessa tutkitaan tällä hetkellä etenkin Ekapeli-Matematiikka-pelin (Salminen ym., Niilo Mäki Instituutti) sekä Nallematikka-harjoitusohjelman (Mattiinen ym., Niilo Mäki Instituutti, Mattinen ym. 2010) vaikuttavuutta. Aunio (2006) totesi, kuten Van Luit ja Schopmannin (2000), lasten lukukäsitteen olevan kontrolliryhmää parempi välittömästi intervention jälkeen tehdyissä mittauksissa. Eron todettiin kuitenkin hävinneen, kun lasten taitoja mitattiin puoli vuotta harjoitusohjelman jälkeen.

## **TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSMENETELMÄT**

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, kehittyvätkö matemaattisesti heikkojen esikouluikäisten lasten matemaattiset taidot, kun heille tarjotaan rikastettua opetusta ”Minäkin lasken!” -ohjelman (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) avulla.

### **Osallistujat**

Tutkimuksessa oli mukana yhteensä 17 esiopetukseen osallistunutta lasta: kymmenen esikouluikäistä sekä seitsemän starttiluokkalaista. Starttiluokan oppilaat ovat koululykkäyksen saaneita lapsia, jotka tarvitsevat tukea sekä aikaa kasvulle ja kehitykselleen ennen perusopetuksen aloittamista. Tutkituista lapsista nuorin oli

alkukartoitusta tehtäessä 6 v 2 kk ja vanhin 7 v 9 kk. Tutkimusryhmästä tyttöjä oli seitsemän ja poikia kymmenen. Tutkimusryhmä jaettiin interventioryhmään (4 lasta) ja kontrolliryhmään (13 lasta) alkumittauksen mukaan (ks. tutkimusprosessi).

### **Arviointivälineet**

Lasten matematiikan osaamista mitattiin tässä tutkimuksessa ensinnäkin MAVALKA 1 -tehtävistöllä (Lampinen, Ikäheimo & Dräger, 2007) kaksi kertaa, interventiota ennen ja heti sen jälkeen. MAVALKA (MAtematiikan VALmiuksien KArtoitus) on kriteeripohjainen kartoitus (ei normitettu), jonka avulla voidaan selvittää yksilökohtaisesti lapsen matematiikan valmiudet kolmella osa-alueella: lukukäsite, lukujonotaidot ja lukumäärän säilyminen. MAVALKAn tekijöiden mukaan kartoitus soveltuu tehtäväksi erityisopetuksessa ja starttiluokalla. Ensimmäisen osion lukukäsitettä mittaavat tehtävät on muokattu suomalaisten matematiikan 1. luokan oppikirjojen, unkarilaisen Varga-Neményi-opetusmenetelmän 1. luokan tehtävyyppien ja MD-matematiikkate-rapiassa käytettävien tehtävien pohjalta. Lukujonotaitojen kartoitus noudattelee suomalaisia vastaavia lukujonotehtävyyppiejä (ks. esim. Kinnunen, 2003; Dufva, 2007). Lukumäärän säilyvyysominaisuutta selvitetään Piaget'n tehtävyyppin (Piaget, 1965) mukaan.

Lukukäsiteosion avulla selvitetään, miten lapsi hallitsee lukukäsitteen kolme aspektia (lukumäärä, lukusana ja numero-merkki) sekä missä vaiheessa hän on lukukäsitteen hallinnassa. Osiossa selvitetään myös lukumäärien visuaalista hahmottamista (pikalukua eli suurempien lukumäärien hahmottamisen taitoja), kartoitetaan lukumäärien vertailun hallintaa (yhtä monta kuin, enemmän kuin ja vähemmän kuin) sekä tutkitaan lisäämistä ja vähen-

tämistä. Muutamassa tehtävässä kuormitetaan niin ikään lapsen kuulonvaraista työmuistia.

Lukujonotaitojen osalta kartoitetaan lukujen luettelemisen taidot kahteenkymmeneen saakka sekä lukujen luettelon hallintaa keskeltä lukujonoa eteenpäin. Lisäksi selvitetään, osaako lapsi laskea esineiden lukumäärän yksitellen kymmeneen saakka.

Lukumäärän säilyvyysosion tehtävissä lapsen tulee vertailla helmien lukumäärää asettamalla ne pariinonon. Helmien määrää ei saa laskea vaan lapsen tulee helmiä siirtämällä vertailla niitä. Lukumäärän säilyvyys on kehittynyt, kun lapsi ymmärtää, ettei lukumäärä muutu, vaikka laskettavat esineet siirretään kauemmaksi toisistaan.

Kartoitus sisältää yhteensä 18 tehtäväkokonaisuutta kolmella eri osa-alueella. Osioista suurin osa pisteitetään kaksiluokkaisesti: 1 = oikea vastaus, 0 = ei vastausta / virheellinen vastaus. Vain lukukäsiteosion (osio 1) kahdessa tehtävässä pisteitys tapahtuu kolmeen luokkaan: 2 = antaa laske-matta oikean vastauksen, 1 = antaa oikean vastauksen yksitellen laskemisen jälkeen, 0 = ei vastausta / virheellinen vastaus. Osiota 3, lukumäärän säilyvyys, mitataan asteikolla kehittynyt – epävarma – ei kehittynyt. Tehtäviin lapsi vastaa yleensä suullisesti, mutta osassa tehtävistä pyydetään myös toiminnallinen vastaus (esim. ”Ota yhtä monta helmeä kuin kortissa on perhosia”). Kartoittaja toimii kartoitustilanteessa lapsikohtaisen lomakkeen ohjeiden mukaisesti. Materiaalit, joita kartoituksessa tarvitaan, annetaan kartoitettavalle tehtäväkohtaisesti.

Kolmannessa mittauksessa, vuosi intervention jälkeen, käytettiin LukiMatiin kuuluvaa Ensimmäisen luokan seula. LukiMat-arvioinnin neljän tehtäväkokonaisuuden sisältöinä olivat lukumääräisyy-

den taju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, aritmeettiset perustaidot sekä lukujärjestelmän soveltaminen. Arviointi sisällsi kahdeksan tehtäväkokonaisuutta.

Analyysin aluksi tarkistettiin mittareiden reliabiliteetit koko aineistossa (taulukko 1). Hyväksyttävänä reliabiliteetin rajana käytettiin .60:tä, jonka alle sijoittuvaa alphan arvoa pidetään heikkona tai ei hyväksyttävänä (George & Mallery, 2003). Tarkastelu osoitti reliabiliteetit analyysihin riittämättömiksi MAVALKAn ensimmäisen mittauksen Lukujono-osiossa sekä MAVALKAn toisen mittauksen Lukujono- ja Lukumäärän säilyttäminen osioissa.

### **Minäkin lasken! -harjoitusohjelma**

Harjoitusohjelma Minäkin lasken! (Van Luit & Schopman, 1998; Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) on suunniteltu sellaisille 4–7-vuotiaille lapsille, joilla on heikkoutta lukukäsitteessä eli matemaattisissa esitaidoissa. Alun perin hollantilaisen harjoitusohjelman julkaisi suomeksi syksyllä 2010 Niilo Mäki Instituutti. Harjoitusohjelma sisältää 20 oppituntia ja oppimiskokonaisuutta sekä niihin liittyvät suunnitelmat, ohjeet ja materiaalit. Tämän tutkimuksen aikana käytössä ollut harjoitusohjelma oli koevedos Minäkin lasken! -ohjelmasta.

Harjoitusmateriaalin oppimisteoreettisena lähtökohtana on Hollannissa 1970-luvulta saakka kehitetty niin sanottu ”realistinen matematiikanopetus” (RMO). RMO tarkastelee matematiikkaa jokaisen lapsen omana konstruktiona, joka saa merkityksensä todellisen elämän tilanteissa. Lasta ohjataan kehittämään omia ajatusmalleja todellisen elämän tilanteisiin. Omista ratkaisumalleista edetään oppilasryhmän tekemiin ratkaisumalleihin, niistä taas vertailun avulla yleisempiin ratkaisumalleihin, jotka esitetään formaalilla tavalla. Ohjelmassa RMO:n lähestymistapa näkyy oppisisällöissä (perhe, juhlat, posti,

kauppa) sekä siinä, miten tehtävä on rakennettu. Lasta ohjataan löytämään näissä konteksteissa erilaisia yksilöllisiä ratkaisumalleja matemaattisiin ongelmiin aikuisen tarjoamien valmiiden strukturoitujen mallien sijaan.

Toisena teoreettisena näkökulmana on taitojen oppiminen sosiaalis-kulttuurisena prosessina. Lapsi oppii taitoja omassa ympäristössään ja kulttuurissaan ollessaan vuorovaikutuksessa aikuisten ja muiden lasten kanssa. Matemaattinen ajattelu ei ole universaalien matemaattisten sääntöjen ja periaatteiden löytämistä, vaan vuorovaikutuksen asteittaista sisäistämistä omiksi ajattelu- ja toimintamalleiksi. Vuorovaikutuksessa lapselle kehittyy asteittain oman kulttuurin mallien ja tapojen kautta ymmärrys matematiikan käsitteistä ja niiden käytöstä. Opetuksen kannalta keskeisenä teoreettisena käsitteenä on Vygotskin ajatus lähikehityksen vyöhykkeestä, jolla yksinkertaistettuna tarkoitetaan sitä, että yhteistyössä ja ohjauksessa lapsi pystyy ratkaisemaan vaikeampia tehtäviä kuin itsenäisesti.

Ohjelmassa harjoitellaan lukuja 1–15 sekä lukukäsitteen muita osa-alueita (esim. luokittelu, sarjoittaminen, yksi yhteen-vastaavuus). Ohjelma rakentuu neljästä teemasta: perhe, juhlat, posti ja kauppa. Kuhunkin teemaan liittyy viisi oppituntia, ja niiden aikana käsitellään tiettyjen lukujen ryhmiä (esim. luvut yhdestä viiteen). Opetusmateriaaleina käytetään konkreettisia esineitä (esim. kyniä), semikonkreettisia esineitä (esim. kuva, jossa on kynä ja sen alla viivakuviolla ilmaistuna, kuinka monta kynää lapsen pitää ostaa kaupasta) sekä formaaleja symbolikortteja (esim. numero). Näiden kolmen erilaisen materiaalin avulla lasta opetetaan käyttämään lukuja konkreettisissa ja abstrakteissa tilanteissa sekä liikkumaan sujuvasti konkreettisista abstrakteihin tilanteisiin.



Ohjelman erikoisuutena on lukumäärän ilmaiseminen pystyviivojen avulla eli lukukuvion hyödyntäminen. Lukukuvio mallittaa selkeän yksi yhteen -suhteen avulla konkreettisia lukumääriä ja tarjoaa hyvät mahdollisuudet lyhentää laskemisprosesseja. Viivastrukturi stimuloi myös lasta lukumäärän hahmottamiseen yhdellä silmäyksellä. Viivastrukturi muistuttaa ”tukkimiehen kirjanpitoa”, mutta eroaa siitä siinä, että viides viiva ei tule neljän viivan päälle vaan niiden viereen ja lopuksi viisi viivaa ympäröidään (kuvio 2).

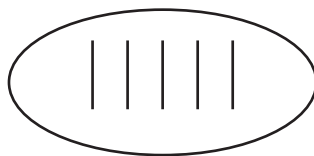
Tutkimustulosten (ks. Aunio, Hautamäki & Van Luit, 2005) mukaan ohjelma sopii kaikille 4–7-vuotiaille lapsille, jotka ovat jääneet ikäisistään jälkeen matemaattisten esitaitojen omaksumisessa, ja sen avulla on mahdollista tukea alle kouluikäisten lasten matemaattisten taitojen kehittymistä. Ohjelman tavoitteena on tukea lasta niin, että hän koulun alkaessa on valmiimpi omaksumaan siellä annettavaa matematiikan opetusta. Harjoitusohjelman sisällön mukaisen opetustuokion pituudeksi viikoittain muodostuu noin kolmekymmentä minuuttia.

### Tutkimuksen toteuttaminen

Esikoululaisten matemaattisia taitoja arvioitiin yksilöllisesti tehdyllä MAVALKA-kartoituksella kaksi kertaa lukuvuoden aikana. Alkumittaus suoritettiin loka- ja marraskuussa 2009, loppumittaus inter-

ventiojakson lopussa huhtikuussa 2010. Keväällä 2011, vuosi intervention loppumisen jälkeen, tehtiin viivästetty loppumittaus. Alkumittauksesta saatuja pistemääriä apuna käyttäen lapsista valikoitiin neljän lapsen interventior ryhmä (kaksi esikoululaista ja kaksi starttiluokkalaista). Kaikilla interventior ryhmään valituilla lapsilla oli MAVALKA-kartoituksen mukaan heikkoutta matemaattisessa ajattelussa, ja heidän kokonaispistemääränsä jäi mittaauksessa alle 24:n, jonka kartoituksen tekijät olivat asettaneet huolen rajaksi. Tutkimuksen analyyseissä alkumittauksesta oli käytettävissä 17 lapsen tulokset (interventior ryhmä  $n = 4$  ja kontrolliryhmä  $n = 13$ ). Loppumittaus pystyttiin tekemään 13 lapselle (interventior ryhmä  $n = 4$  ja kontrolliryhmä  $n = 9$ ), sillä neljä kontrollilasta muutti toiselle paikkakunnalle lukuvuoden aikana. Analyysiä vahvistaaksemme käytimme viivästetyssä loppumittauksessa luokkakontrolleina 39:ää samassa opetusryhmässä opiskellutta lasta. Analyyseissä lasten tuloksia verrattiin toisiinsa sekä kokonaispisteiden että eri osioista saatujen pisteiden osalta.

Lukuvuoden aikana interventior ryhmä osallistui Minäkin lasken! -harjoitusohjelmaan. Lapsia opetettiin 18 viikon ajan kerran viikossa keskimäärin kolmekymmentä minuuttia kerrallaan. Kontrolliryhmänä tutkimuksessa toimivat loput (yhdeksän) esikoululaista.



*Kuvio 2. Luku viisi viivastruktuurissa*

## TULOKSET

Interventioryhmään kuuluneet lapset erosivat matemaattisilta taidoiltaan saman ryhmän kontrollilapsista alkumittauksessa, mutta eivät enää harjoitusjakson jälkeen (taulukko 1). Erot ryhmien välillä olivat merkitseviä MAVALKAn kokonaispistemäärässä (Kruskall-Wallis-testissä ryhmien ero merkitsevä  $p = .003$ ) sekä Lukukäsite-osassa (Kruskall-Wallis-testissä ryhmien ero merkitsevä  $p = .019$ ).

Viivästetyssä loppumittauksessa, vuosi intervention lopettamisen jälkeen, interventiolapset eivät eronneet matemaattisilta taidoiltaan oman ikäryhmänsä saman koulun lapsista.

Kun tarkastellaan lasten taitojen kasvua intervention aikana (taulukko 2), huomataan, että interventioon osallistuneiden lasten lukukäsitetaidot (Kruskall-Wallis-testissä ryhmien ero merkitsevä  $p = .012$ ) kehittivät enemmän kuin kontrolliryhmän.

**Taulukko 1. Lasten lukumäärä, mittareiden keskiarvojen vaihteluväli, keskiarvot, standardipoikkeamat ja reliabiliteetit**

Mittari	Koko aineisto						Interventioryhmä					Kontrolliryhmä					Luokkakontrolli				
	n	min	max	ka	kh	$\alpha$	n	min	max	ka	kh	n	min	max	ka	kh	n	min	max	ka	kh
<i>Alkumittaus</i>																					
Mavalka 1 Summa	17	19.00	37.00	28.30	4.96	.76	4	19.00	24.00	22.75*	2.50	13	25.00	37.00	30.00	4.22					
Mavalka 1 Lukukäsite	17	14.00	24.00	19.53	3.69	.73	4	14.00	19.00	15.75*	2.36	13	15.00	24.00	20.70	3.25					
Mavalka 1 Lukujono	17	3.00	6.00	5.41	.87	.13	4	3.00	6.00	4.5*	1.29	13	5.00	6.00	5.69	.48					
Mavalka 1 LKM säilyvyys	17	.00	7.00	3.35	2.09	.72	4	1.00	5.00	2.5	1.73	13	.00	7.00	3.62	2.18					
<i>Loppumittaus</i>																					
Mavalka 2 Summa	13	20.00	32.00	27.69	3.59	.64	4	22.00	30.00	26.50	3.70	9	20.00	32.00	28.22	3.63					
Mavalka 2 Lukukäsite	13	15.00	24.00	21.00	2.94	.70	4	18.00	24.00	21.25	3.20	9	15.00	24.00	20.89	3.01					
Mavalka 2 Lukujono	13	3.00	6.00	5.08	1.19	.27	4	3.00	6.00	4.50	1.29	9	3.00	6.00	5.33	1.11					
Mavalka 2 LKM säilyvyys	13	.00	3.00	1.62	.96	.08	4	.00	2.00	.75*	.96	9	1.00	2.00	2.00	.71					
<i>Viivästetty loppumittaus</i>																					
LukiMat Summa	42	21.00	44.00	37.49	5.30	.86	3				34.33	4.93					39	21.00	44.00	37.72	5.31

\* $p < .05$  (Kruskall-Wallis vertailussa interventioryhmän ja kontrolliryhmän välillä)

**Taulukko 2. Taitojen kasvu ryhmittäin intervention aikana**

Mittari	Koko aineisto			Interventioryhmä			Kontrolliryhmä		
	n	ka	kh	n	ka	kh	n	ka	kh
Mavalka Sum kasvu	13	1.38	3.66	4	3.75	3.86	9	0.33	3.24
Mavalka Lukukäsite kasvu	13	2.85	3.39	4	5.50*	3.32	9	1.67	2.82
Mavalka Lukujono kasvu	13	-0.15	1.21	4	.00	1.63	9	-0.22	1.09
Mavalka LKM säilyvyys kasvu	13	1.31	2.02	4	-1.75	1.71	9	-1.11	2.20

\* $p < .05$  (Kruskall-Wallis vertailussa interventioryhmän ja kontrolliryhmän välillä)

## POHDINTA

Syksystä keväeseen toteutetun Minäkin lasken! -harjoitusohjelman avulla harjoitettiin lapsia, joilla oli heikot matematiikan valmiudet. Harjoitusohjelman vaikutavuus voitiin tutkimuksessa tilastollisesti osoittaa. Interventioryhmän lasten taidot kehittivät tutkimusjakson aikana enemmän kuin kontrolliryhmän lasten. Huomattavin edistyminen tapahtui lukukäsittelyn hallinnassa. Harjoitusohjelman alkaessa interventioryhmän lasten matemaattiset taidot olivat heikommät kuin kontrolliryhmän lasten. Loppumittauksessa ryhmien välinen ero oli hävinnyt. Ryhmien välisiä eroja ei ollut havaittavissa myöskään vuosi intervention lopettamisen jälkeen.

Tutkimuksen tulos on yhtäpitävä Aunio (2005) tutkimuksen kanssa, jossa todettiin lasten, joilla oli heikkoutta matemaattisissa taidoissa, hyötyvän Minäkin lasken! -pienryhmäharjoittelusta (Aunio 2008, 71; Aunio, Hautamäki & Van Luit, 2005). Merkittävin muutos tapahtui lukukäsittelyn (lukumäärä, lukusana, numeromerkki sekä yhteen- ja vähennyslasku) hallinnassa. Lukujonotaidoissa sen sijaan ei kehittymistä kummallakaan ryhmällä ollut todettavissa. Syitä lukujonotaitojen vähäiseen kehittymiseen voitaneen etsiä ainakin harjoitusohjelman sisällöstä. Interventio-ohjelman sisältönä olivat luvut 1–15, jolloin harjoitusta mittarin edellyttämään kahteenkymmeneen saakka ei tullut.

Tuloksissa oli myönteistä se, että kehitystä näkyi lukumäärien laskemisessa sekä symboli-lukusana-lukumäärä-yhteyden ymmärtämisessä, joita harjoiteltiin ohjelmassa monipuolisesti. Toisaalta harjoiteltiin myös yksinkertaisia yhteen- ja vähennyslaskuja esineiden avulla; niidenkin osaaminen kehittyi muiden lasten osaamisen tasolle. Interventioiden vaikuttavuutta

arvioitaessa olisikin ensiarvoisen tärkeää pohtia, saavuttavatko lapset taidoissaan muut omanikäisensä lapset niin, että he pystyvät seuraamaan opetusryhmän tavallista opetusta (Fuchs & Fuchs, 2007). Aina niin ei käy, ja silloin on hyvä tarkastella, kehittyvätkö lasten taidot kuitenkin intervention aikana (Gresham, 2007), jolloin ehkä interventiota muokkaamalla voitaisiin päästä parempiin oppimistuloksiin. Tässä tutkimuksessa interventioryhmän lasten lukumäärän laskutaito ja yhteen- ja vähennyslaskutaidot kehittivät nopeammin intervention aikana kuin muilla lapsilla. Tämän lisäksi he saavuttivat muiden lasten tason ja pysyivät jatkossakin sillä huolimatta intervention loppumisesta.

Tämän tutkimuksen tulosten yleistettävyyteen pitää suhtautua varauksella tutkimusryhmien pienuuden takia sekä mittareihin liittyvien reliabiliteettipulmien takia. Lisäksi on muistettava, että tässä tutkimuksessa ei kerätty tietoa lasten muusta oppimisesta. Tulevaisuudessa tutkimus kannattaisi toistaa isommilla ryhmillä ja kerätä tietoa myös lasten muista oppimistaidoista.

Koska matematiikan oppiminen on alkuvaiheessa luonteeltaan suurelta osin hierarkkista, vahvan perustan luominen on ensiarvoisen tärkeää (Sarama & Clements, 2009). Matemaattisten taitojen on todettu kehittyvän nopeammin lapsilla, joilla jo esiopetukseen tullessaan on parempi matemaattisen osaamisen taso, kuin niillä lapsilla, joiden lähtötaso on heikompi (Aunola ym., 2004). Riittävän varhaisella oppimisen pulmien tunnistamisella ja niihin puuttumisella on mahdollista ehkäistä tätä Matteus-efektiksi kutsuttua kehityskulua ja antaa matemaattisissa taidoissaan hitaammin kehittyville lapsille riittävät valmiudet omaksua esi- ja alkuopetuksen sisältöjä. Ajoissa aloitetulla, riittävän varhaisiin matemaattisiin esitaitoihin koh-

distuvalla tuella voidaan luoda paremmat edellytykset koulumatematiikan oppimiselle sekä kenties ehkäistä pysyvämpien matemaattisten vaikeuksien syntymistä.

Hannula (2006) on todennut, että esimerkiksi lukumäärien spontaanilla huomioimisella ja lasten kannustamisella lukumäärien seuraamiseen voi olla merkittävä vaikutus lasten myöhempien matemaattisten taitojen kannalta. Aunio (2008) mukaan taas opetuksen ratkaisulla on mahdollista vaikuttaa lasten matemaattisen ajattelun kehittymiseen ennen koulun alkua, etenkin silloin, kun kyse on taidoiltaan heikoista lapsista. Tämän tutkimuksen mukaan Minäkin lasken! -ohjelma (Van Luit ym., 2010) näyttäisi olevan yksi mahdollinen tukimuoto niille lapsille, joilla todetaan heikkoutta esimatemaattisissa taidoissa. Tämä tutkimus osoitti tehostetun tuen mahdollisuudet. Lapset hyötyivät, kun heille tarjottiin rikastettua opetusta.

#### Kirjoittajatiedot:

Kasvatust. maist., erityisopettaja Erja Lusetin tämän artikkelin taustalla oleva pro gradu -työ valmistui Helsingin yliopiston käyttäytymistieteellisessä tiedekunnassa keväällä 2011. Tällä hetkellä Erja työskentelee erityisopettajana alakoulussa.

Erityispedagogiikan dosentti, kasvatust. toht. Pirjo Aunio työskentelee erityispedagogiikan yliopistonlehtorina ja tutkijana Helsingin yliopistossa. Hän oli Erja Lusetin pro gradu -työn toinen ohjaaja.

## LÄHTEET

Ahonen, T., Aro, M., Lamminmäki, T. & Närhi, V. (1997). Koulutulokkaiden kognitiiviset taidot. Teoksessa T. Lamminmäki & L. Meriläinen (toim.), *Onnistunut aikalisä? Kokemuksia koululyykkäyksestä*, 38–55. Jyväskylä: Atena.

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: Continuum.

Ansari, D. (2010). Neurocognitive approaches to developmental disorders of numerical

and mathematical cognition: The perils of neglecting the role of development. *Learning and Individual Differences*, 20, 123–129.

- Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-Bulletin*, 2008, 18 (4), 63–74. Jyväskylä: Niilo Mäki Säätiö.
- Aunio, P., Hannula, M. & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 274–300. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Aunio, P., Hautamäki, J. & van Luit, J. (2005). Mathematic thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. *European Journal of Special Needs Education* 20, 131–146.
- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Journal of Individual differences* 20, 427–435.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96, 699–713.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 46, 3–18.
- Bryant, D.P., Bryant, B.R., Gersten, R., Scammacca, N. & Chavez, M.M. (2008). Mathematics intervention for first- and second-grade students with mathematics difficulties: The effects of tier 2 intervention delivered as booster lessons. *Remedial and Special Education*, 29, 20–32.
- Chard, D.J., Baker, S.K., Clarke, B., Jungjohann, K., Davis, K. & Smolkowski, K. (2008). Preventing early mathematics difficulties: the feasibility of a rigorous kindergarten mathematics curriculum. *Learning Disability Quarterly*, 31, 11–20.
- Clements, D.H. & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum:

- Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 136–163.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics*. New York, Oxford University Press.
- Dufva, M. (toim.) (2007). KIMARA. Oppimistutkimuksen keskus. Turun yliopisto.
- Fuchs, L.S. & Fuchs, D. (2007). A model for implementing responsiveness-to-intervention. *Teaching Exceptional Children*, 39, 14–20.
- Fuson, K.C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. Teoksessa D.A. Grouws (toim.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 243–275. New York: MacMillan Publishing Company.
- George, D. & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference*. 11.0 update. (4. painos.) Boston: Allyn & Bacon.
- Gresham, F.M. (2007). Evolution of the Response-to-Intervention Concept: Empirical Foundations and Recent Developments. Teoksessa S.R. Jimerson, M.K. Burns, A. Van Der Heyden (toim.), *Handbook of Response to Intervention. The Science and Practice of Assessment and Intervention*, 10–24. New York: Springer.
- Hannula, M. & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction*, 15, 237–256.
- Hannula, M.M. & Lepola, J. (2006). Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivaationaalisten valmiuksien kehitys. Turun yliopiston tiedekunnan julkaisu A: 205. Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos.
- Kidd, J.K., Paskas, R., Gadzichowski, M., Ferral-Like, M. & Gallington, D. (2008). Enhancing early numeracy by promoting the abstract thought involved in the oddity principle, seration, and conservation. *Journal of Advanced Academics*, 19, 164–200.
- Kinnunen, R., Lehtinen, E. & Vauras, M. (1994). Matemaattisen taidon arviointi. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta & P. Niemi (toim.), *Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla*, 55–76. Oppimistutkimuksen keskus, julkaisu 3. Turku: Turun yliopisto.
- Kinnunen, R. & Vauras, M. (1998). Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 269–282. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Lai, M.-L., Baroody, A.J. & Johnson, A.R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, 23, 216–235.
- Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. (2007). MAVALKA 1 ja 2. Opettajan opas. Helsinki: Opperi.
- Landerl, K., Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93, 99–125.
- LukiMat: Vanhemmalle. Saatavilla osoitteessa <http://www.lukimat.fi/matematiikka/Vanhemmalle/matematiikset-oppimisvaikeudet>. Haettu 4.3.2011.
- Mattinen, A. (2006). Huomio lukumääriin: Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Sarja C. Osa 247. Turku: Turun yliopisto.
- Mattinen, A., Räsänen P., Hannula M.M. & Lehtinen, E. (2010). Nallematikka: 4–5-vuotiaiden lasten oppimisvalmiuksien kehittäminen – pilottitutkimuksen tulokset. *NMI-Bulletin*, 2, 41–59.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number* (Lapsen ymmärrys luvuista). New York: Norton.
- Räsänen, P. (2001). Matematiikan oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.),

- Oppimisvaikeudet. Kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena, 332–359. Jyväskylä: Atena.
- Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A.J., Aunio, P. & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24, 450–472.
- Sarama, J. & Clements, D.H. (2009). Early childhood mathematics education research – Learning trajectories for young children. New York: Routledge.
- Sophian, C. (1998). A developmental perspective on children's counting. Teoksessa C. Donlan (toim.), *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology*, 27–46. Hove, UK: Psychology Press.
- Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. (2003). Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.), *Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa*, 92–301. Opetus 2003. Jyväskylä: PS-kustannus.
- van Luit, J., Aunio, P. & Räsänen, P. (2010). *Minäkin lasken! Lasten lukukäsitteen harjoitusohjelma*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- van Luit, H. & Schopman, E. (1998). *Als speciale kleuter tel je ook mee! Voorbereidende rekenactiviteiten voor kleuters met een ontwikkelingsachterstand (Matemaattisten esitaitojen harjoitusohjelma kehityksessään erityispedagogisen tuen tarpeessa oleville lapsille)*. Doetinchem, The Netherlands: Graviant.
- van de Rijt, B.A.M., Van Luit, J.E.H. & Pennings, A.H. (1999). The construction of the Utrecht early mathematical competence scale, *Educational and Psychological Measurement*, 59, 289–309.